

УДК 656.07

DOI 10.51955/2312-1327\_2021\_2\_6

## СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

*Роксана Еноковна Шипицына,  
orcid.org/0000-0002-0730-6569,  
аспирант 1 курса*

*ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет»,  
пр. Мира, 5  
Омск, 644080, Россия  
roxy4k@mail.ru*

*Евгений Евгеньевич Витвицкий,  
orcid.org/0000-0002-0155-8941,  
доктор технических наук, профессор*

*заведующий кафедрой «Организация перевозок и управление на транспорте»  
ФГБОУ ВО «Сибирский государственный автомобильно-дорожный университет»,  
пр. Мира, 5  
Омск, 644080, Россия  
vitvitsky\_ee@mail.ru*

**Аннотация.** В статье рассмотрен один из методов оптимизации планирования перевозок – транспортная задача линейного программирования. Перечислены основные методы нахождения опорного плана грузевых ездов и оптимального плана при ее решении. Представлена формальная математическая модель и система ограничений транспортной задачи. На основе формальной математической модели построена содержательная математическая модель. Приведен пример решения указанной задачи: опорный план грузевых ездов создан методом «северо-западного угла», оптимальный план возврата порожних автомобилей распределительным методом. Проведено сравнение результатов применения методов решения транспортной задачи линейного программирования: сравнение опорного плана, полученного методами наименьшей стоимости и северо-западного угла, сравнение оптимального плана возврата порожних автомобилей, полученного методами потенциалов и распределительным. Критериями сравнения выбраны: количество итераций, трудоемкость, полученный результат. На основании этого установлено, что полученный оптимальный план возврата порожних автомобилей – одинаков, по другим критериям сравнения есть ряд отличий.

**Ключевые слова:** транспортная задача линейного программирования, математическая модель, опорный план, оптимальный план, методы решения, метод северо-западного угла, метод минимального элемента (наименьшей стоимости), распределительный метод, метод потенциалов.

# COMPARISON OF THE RESULTS OF APPLICATION OF METHODS FOR SOLVING THE TRANSPORTATION PROBLEM OF LINEAR PROGRAMMING

*Roxana E. Shipitsyna,  
orcid.org/ 0000-0002-0730-6569,  
1<sup>st</sup> year postgraduate student of the department «OPUT»,  
Federal State Budget Educational Institution of Higher Education "Siberian State Automobile  
and Highway University",  
Mira, 5  
Omsk, 644080, Russia  
roxy4k@mail.ru*

*Evgeny E. Vitvitsky,  
orcid.org/ 0000-0002-0155-8941,  
Doctor of Technical Sciences, Full professor,  
Head of Department "Organization of transportation and transport management"  
Federal State Budget Educational Institution of Higher Education "Siberian State Automobile  
and Highway University"  
Mira, 5  
Omsk, 644080, Russia  
vitvitsky\_ee@mail.ru*

**Abstract.** The article discusses one of the methods of optimizing the transportation planning – a transport linear programming problem. The main methods for finding the reference plan for loaded riders and the optimal plan for solving it are listed. A formal mathematical model and a system of transport problem constraints are presented. A conceptual mathematical model is built on the basis of a formal mathematical model. An example of solving this problem is given: the reference plan of loaded riders was created with the use of the "north-west corner" method, the optimal plan for the return of empty vehicles with the use of the distribution method. Comparison of the results of application of methods for solving the transport problem of linear programming was carried out: comparison of the reference plans obtained with the use of the least-cost and north-west corner methods, comparison of the optimal plans for the return of empty cars obtained with the use of potential and distribution methods. Comparison criteria selected were the number of iterations, labor intensity, the result. Based on this, it was established that the obtained optimal plan for the return of empty cars is the same; according to other comparison criteria, there are a number of differences.

**Keywords:** linear programming transport problem, mathematical model, baseline plan, optimal plan, solution methods, north-west corner method, minimum-element (least-cost) method, distribution method, potential method.

Одним из приоритетных направлений развития науки и технологий является транспорт. Этот тезис подтверждается в прогнозе научно-технологического развития Российской Федерации на период до 2030 года, где направлению «Транспорт» уделяется пристальное внимание [Прогноз..., 2014]. В этом документе перечислены наиболее актуальные области исследований, окна возможностей для проведения исследований, угрозы и результаты, ожидаемые от науки.

В качестве перспективных рынков особое внимание из прогноза научно-технологического развития Российской Федерации на период до 2030 года следует уделить следующим аспектам транспортной системы:

- планированию, прогнозированию и моделированию развития транспортных систем на основе транспортно-экономического баланса;
- методам и системам статистического наблюдения для построения этого баланса;
- комплексной системе планирования и моделирования транспортной системы [Прогноз..., 2014].

Одним из направлений организации транспортной логистики является оптимизация не только расходов по задействованию автотранспортных средств на предприятии, но также и оптимизация самих перевозок [Sarder, 2021].

Оптимизация перевозок грузов является процессом выбора наилучшего плана организации перевозок с применением определенных технологий и методов, в рамках оптимизации рассчитывают затрачиваемое время и затраты на перевозку и выбирают те из них, которые наиболее оптимальны в ситуации [Аникин, 2016; Афанасьев, 1965; Гаджинский, 2015].

Развитие начинается с планирования и прогнозирования ожидаемых результатов [Дыбская, 2012; Миротин, 2003]. На сегодняшний день известно большое количество методов оптимизации планирования перевозок [Витвицкий и др, 2019; Крылова и др., 2019], одним из которых является линейное программирование, в частности, транспортная задача линейного программирования (ТЗЛП) [Bogdan, 2018].

ТЗЛП охватывает процесс перевозки грузов от поставщика к потребителям [Дыбская, 2014; Мельников, 2016]. Ее решение дает возможность:

- разработать рациональные способы и пути перевозки грузов;
- свести к минимуму затраты на перевозку.

Важно отметить, что ТЗЛП не является планом перевозок грузов, но ее решение находится «внутри» построения этого плана.

Для решения ТЗЛП сначала определяется начальный опорный план груженых ездов (далее – опорный план), затем путем его совершенствования определяется оптимальный план возврата порожних автомобилей (далее – оптимальный план) [Палий, 2007].

Существуют различные методы определения начального опорного и оптимального планов.

Методы определения начального опорного плана: северо-западного угла, вычеркивания (двойного предпочтения), аппроксимации Фогеля, минимального элемента (наименьшей стоимости) и другие.

Методы определения оптимального плана: потенциалов, распределительный, дифференциальных рент, МОДИ и другие [Dantzig, 1963; Проектирование ..., 2001].

Наличие альтернатив требует обоснованного ответа: какой метод использовать при построении опорного плана, какой метод использовать для построения оптимального плана применительно к каждой конкретной ситуации, какова трудоемкость (количество итераций, время решения) при использовании того или иного метода, одинаков ли будет конечный результат.

Попробуем ответить на вопросы на примере решения ТЗЛП.

Условия задачи: От трех поставщиков ( $A_i, i=1,2,3$ ), товары которых по количеству составляют  $a_i$ т, необходимо перевезти груз в пять магазинов ( $B_j, j=1,2,3,4,5$ ), потребности которых в количестве составляют  $B_j$ т.

Наличие груза у поставщиков:  $a_1 = 320, a_2 = 280, a_3 = 250$ .

Потребность в грузе у магазинов:  $B_1=150, B_2=140, B_3=110, B_4=230, B_5=220$ .

Наличие груза у поставщиков и потребность в грузе у магазинов называются объемом отправления и потребления груза, который представлен в таблице 1.

Таблица 1 – Объем отправления и потребления груза

Условное обозначение грузоотправителя	Наличие груза, т	Условное обозначение грузополучателя	Потребность в грузе, т
$A_1$	320	$B_1$	150
$A_2$	280	$B_2$	140
$A_3$	250	$B_3$	110
		$B_4$	230
		$B_5$	220

Все пункты связаны транспортной сетью. При этом для каждой транспортной коммуникации известны удельные показатели эффективности ее использования  $C_{ij}$ . Стоимости перевозки 1 т груза представлены в матрице  $C$ , тысяч рублей.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 29 & 6 \\ 23 & 15 & 11 \\ 20 & 16 & 10 \\ 15 & 19 & 9 \\ 24 & 29 & 8 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Необходимо написать на основе формальной модели содержательную математическую модель задачи и составить оптимальный план таким образом, чтобы затраты на перевозку были минимальны.

Решение: Пусть  $x_{ij}$  – количество груза, т, которое перевозится от поставщика  $A_i$  в магазин (потребителю)  $B_j$ . Задача состоит в минимизации расходов на перевозку. Задача решается на минимум транспортной работы, выраженной в тонно-километрах. Математическая модель задачи [Палий, 2007]:

$$P = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (2)$$

система ограничений [Палий, 2007]:

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = a_i \quad (i = 1,2,3) \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j \quad (j = 1,2,3,4,5) \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (5)$$

Если сумма грузов у поставщиков равна общей сумме потребностей в пунктах назначения, то модель ТЗЛП называется закрытой (сбалансированной) [Палий, 2007]:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (6)$$

Для разрешимости ТЗЛП необходимо и достаточно, чтобы условие 6 выполнялось.

Так как запасы груза ( $320+280+250=850$  т) равны суммарным потребностям ( $150+140+110+230+220=850$  т), то условие 6 выполняется, и задача имеет закрытый тип. Опорный план составим методом северо-западного угла. Матрица исходных данных представлена в таблице 2.

Таблица 2 – Матрица исходных данных

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20	29	6	150
$B_2$	23	15	11	140
$B_3$	20	16	10	110
$B_4$	15	19	9	230
$B_5$	24	29	8	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Так как в качестве примера для построения опорного плана было принято использовать метод северо-западного угла, заполнение начинаем с верхнего левого угла. Соответствующий элемент  $C_{11}=20$  (1 – номер столбца, 1 – номер строки, для всех следующих действий принимаем данные условия обозначения клетки: в указании клетки первая цифра – номер столбца, вторая цифра – номер строки): запасы груза составляют 320 т, потребность составляет 150 т, она является минимальной, поэтому ее вычитаем (Таблица 3 – Матрица промежуточных вычислений). В клетку (1;1) ставим 150 т – загрузка клетки.

Таблица 3 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	$150-150=0$
$B_2$	23 0	15 0	11 0	140
$B_3$	20 0	16 0	10 0	110
$B_4$	15 0	19 0	9 0	230
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, т</b>	$320-150=170$	280	250	<b>850</b>

Так как потребность грузополучателя  $B_1$  полностью удовлетворена, то первую строчку во внимание не принимаем и следующий соответствующий элемент  $C_{12}=23$ .

Для клетки  $C_{12}=23$  запасы груза составляют 170 т, потребность составляет 140 т, потребность, равная 140 т, является минимальной, поэтому ее вычитаем, в клетку (2;3) ставим загрузку 140 т. (Таблица 4 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 4 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	$140-140=0$
$B_3$	20 0	16 0	10 0	110
$B_4$	15 0	19 0	9 0	230
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, т</b>	$170-140=30$	280	250	<b>850</b>

Так как потребность грузополучателя  $B_2$  полностью удовлетворена, то вторую строчку во внимание не принимаем и следующий соответствующий элемент  $C_{13}=20$ .

Для элемента  $C_{13}=20$ : запасы груза составляют 30 т, потребность составляет 110 т, минимальным значением является 30, будем вычитать это значение, в клетку (1;3) ставим загрузку 30 т (Таблица 5 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 5 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, тонн
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	0
$B_3$	20 30	16 0	10 0	$110-30=80$
$B_4$	15 0	19 0	9 0	230
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, тонн</b>	$30-30=0$	280	250	<b>850</b>

На данном шаге получено, что у поставщика  $A_1$  запасы стали равны 0. Поэтому при нахождении следующего верхнего левого угла будем обращаться ко второму столбцу (к поставщику  $A_2$ ).

Следующий соответствующий элемент  $C_{23}=16$ : запасы груза составляют 280 т, потребность составляет 80 т, минимальным значением является потребность в 80 т, будем вычитать это значение, в клетку (2,3) ставим загрузку 80 т (Таблица 6 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 6 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	0
$B_3$	20 30	16 80	10 0	$80-80=0$
$B_4$	15 0	19 0	9 0	230
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, т</b>	0	$280-80=200$	250	<b>850</b>

Так как потребность грузополучателя  $B_3$  полностью удовлетворена, то третью строку во внимание не принимаем и следующий соответствующий элемент  $C_{24}=19$ .

Для элемента  $C_{24}=19$ : запасы груза составляют 200 т, потребность составляет 230 т, минимальным значением является 200, будем вычитать это значение (в клетку (2,4) ставим загрузку 200 т) (Таблица 7 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 7 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	0
$B_3$	20 30	16 80	10 0	0
$B_4$	15 0	19 200	9 0	$230-200=30$
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, т</b>	0	$200-200=0$	250	<b>850</b>

На данном шаге получено, что у поставщика  $A_2$  запасы стали равны 0. Поэтому при нахождении следующего верхнего левого угла будем обращаться к третьему столбцу (к поставщику  $A_3$ ). Следующий соответствующий элемент  $C_{34}=9$ : запасы груза составляют 250 т, потребность составляет 30 т, вычитаем меньшее значение (в клетку (3;4) ставим загрузку 30 т) (Таблица 8 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 8 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	0
$B_3$	20 30	16 80	10 0	0
$B_4$	15 0	19 200	9 30	$30-30=0$
$B_5$	24 0	29 0	8 0	220
<b>Запасы груза, т</b>	0	0	220	<b>850</b>

Так как потребность грузополучателя  $B_4$  полностью удовлетворена, то четвертую строчку во внимание не принимаем и следующий соответствующий элемент  $C_{35}=8$ . Для элемента  $C_{35}=8$  запасы груза равны 220 т, потребность равна 220 т. В клетку (3;5) ставим загрузку 220 т (Таблица 9 – Матрица промежуточных вычислений).

Таблица 9 – Матрица промежуточных вычислений

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	0
$B_2$	23 140	15 0	11 0	0
$B_3$	20 30	16 80	10 0	0
$B_4$	15 0	19 200	9 30	30-30=0
$B_5$	24 0	29 0	8 220	220-220=0
<b>Запасы груза, т</b>	0	0	220-220=0	<b>850</b>

На данном шаге построения опорного плана (Таблица 9) все запасы поставщиков вывезены, потребности магазинов удовлетворены в полном объеме.

Таким образом, получен опорный план, который в дальнейшем необходимо будет оценить: является ли он оптимальным [Палий, 2007; Проектирование..., 2001] Опорный план представлен в таблице 10.

Таблица 10 – Опорный план груженых ездов

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 <b>150</b>	29 0	6 0	150
$B_2$	23 <b>140</b>	15 0	11 0	140
$B_3$	20 <b>30</b>	16 <b>80</b>	10 0	110
$B_4$	15 0	19 <b>200</b>	9 <b>30</b>	230
$B_5$	24 0	29 0	8 <b>220</b>	220
<b>Запасы груза, т</b>	320	280	250	<b>850</b>

Значение целевой функции опорного плана (подразумевающее минимизацию затрат на перевозку), согласно формуле 2 составляет:  $P=150*20+140*23+30*20+80*16+200*19+30*9+220*8=13930000,0$  т·км (тонно-километров).

Число занятых клеток должно соответствовать: суммарное количество поставщиков и потребителей за вычетом единицы ( $3+5-1=7$ ). В данном случае по Таблице 10, подсчитав число занятых клеток, получаем 7. Следовательно, опорный план груженых ездов является невырожденным.

Переходим к построению оптимального плана возврата порожних автомобилей распределительным методом. План будет являться оптимальным в том случае, если полученное значение будет соответствовать критерию

оптимизации. Оценим полученный опорный план: является ли он оптимальным. Для этого необходимо для каждой свободной (незагруженная клетка называется потенциальной, свободной) клетки из таблицы 10 определить оценку свободной клетки  $\Delta_{ij}$ , путем построения цикла перерасчета. Начнем с построения цикла для клетки (1;4) (Таблица 11).

Таблица 11 – Оценка свободной клетки (1;4)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 <b>150</b>	29 0	6 0	150
$B_2$	23 <b>140</b>	15 0	11 0	140
$B_3$	20 <b>30 -</b>	16 <b>+ 80</b>	10 0	110
$B_4$	<b>15</b> 0 +	19 <b>- 200</b>	9 <b>30</b>	230
$B_5$	24 0	29 0	8 <b>220</b>	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оценка свободной клетки  $\Delta_{ij}$  – величина, характеризующая изменение суммарных затрат на перевозку (в расчете на единицу перераспределяемого груза) при условии включения в план единичной перевозки от поставщика  $A_i$  к потребителю  $B_j$ . При этом в свободную клетку ставится знак «-», а затем в остальных вершинах (занятых клетках) знаки чередуются по контуру.

Оценка свободной клетки  $\Delta_{1;4}$  (контур: (1;4)-(2;4)-(2;3)-(1;3))= 15-20+16-19=-8. Строим цикл для клетки (1;5) (контур: (1;5)-(1;3)-(2;3)-(2;4)-3;4)-(3;5)). (Таблица 12).

Таблица 12 – Оценка свободной клетки (1;5)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 <b>150</b>	29 0	6 0	150
$B_2$	23 <b>140</b>	15 0	11 0	140
$B_3$	20 <b>30 -</b>	16 <b>+ 80</b>	10 0	110
$B_4$	<b>15</b> 0	19 <b>- 200</b>	9 <b>+ 30</b>	230
$B_5$	24 0 +	29 0	8 <b>- 220</b>	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оценка свободной клетки  $\Delta_{1;5} = 24 - 20 + 16 - 19 + 9 - 8 = 2$ .

Строим цикл для клетки (2;1) (контур: (2;1)-(1;1)-(2;1)-(2;3)) (Таблица 13).

Таблица 13 – Оценка свободной клетки (2;1)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150 -	29 + 0	6 0	150
$B_2$	23 140	15 0	11 0	140
$B_3$	20 30 +	16 - 80	10 0	110
$B_4$	15 0	19 200	9 30	230
$B_5$	24 0	29 0	8 220	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оценка свободной клетки  $\Delta_{2;1} = 29 - 20 + 20 - 16 = 13$ . Строим цикл для клетки (2;2) (контур: (2;2)-(1;2)-(1;3)-(2;3)) (Таблица 14).

Таблица 14 – Оценка свободной клетки (2;2)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 140 -	15 + 0	11 0	140
$B_3$	20 30 +	16 - 80	10 0	110
$B_4$	15 0	19 200	9 30	230
$B_5$	24 0	29 0	8 220	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оценка свободной клетки  $\Delta_{2;2} = 15 - 23 + 20 - 16 = -4$ . Строим циклы для клеток (2;5) (Таблица 15) и (3;1) (Таблица 16).

Таблица 15 – Оценка свободной клетки (2;5)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 140	15 0	11 0	140
$B_3$	20 30	16 80	10 0	110
$B_4$	15 0	19 200 -	9 + 30	230
$B_5$	24 0	29 0 +	8 - 220	220

Запасы груза, т	320	280	250	850
-----------------	-----	-----	-----	-----

Оценка свободной клетки  $\Delta_{2;5} = 29 - 19 + 9 - 8 = 11$ .

Таблица 16 – Оценка свободной клетки (3;1)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150 -	29 0	6 + 0	150
$B_2$	23 140	15 0	11 0	140
$B_3$	20 30 +	16 - 80	10 0	110
$B_4$	15 0	19 + 200	9 - 30	230
$B_5$	24 0	29 0 +	8 - 220	220
Запасы груза, т	320	280	250	850

Оценка свободной клетки  $\Delta_{3;1} = 6 - 20 + 20 - 16 + 19 - 9 = 0$ . Строим цикл для клетки (3;2) (Таблица 17).

Таблица 17 – Оценка свободной клетки (3;2)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 140 -	15 0	11 + 0	140
$B_3$	20 30 +	16 - 80	10 0	110
$B_4$	15 0	19 + 200	9 - 30	230
$B_5$	24 0	29 0 +	8 - 220	220
Запасы груза, т	320	280	250	850

Оценка свободной клетки  $\Delta_{3;2} = 11 - 23 + 20 - 16 + 19 - 9 = 2$ . Строим цикл для клетки (3;3) (Таблица 18).

Таблица 18 – Оценка свободной клетки (3;3)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 140	15 0	11 0	140
$B_3$	20	16	10	110

	<b>30</b>		<b>- 80</b>	<b>+ 0</b>	
<i>B<sub>4</sub></i>	15		19	9	230
	0		<b>+ 200</b>	<b>- 30</b>	
<i>B<sub>5</sub></i>	24		29	8	220
	0		0	<b>220</b>	
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>		<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оценка свободной клетки  $\Delta_{3;3} = 10 - 16 + 19 - 9 = 4$ .

После определения оценок свободных клеток можно сделать вывод о том, что план является не оптимальным.

Имеется несколько клеток с отрицательными оценками: клетка (1;4) и клетка (2;2). Согласно распределительному методу выбирается из клеток с отрицательными оценками та, у которой оценка большая по модулю. Эта клетка (1;4) с отрицательной оценкой (-8).

Необходимо занять эту клетку объемом перевозки, не нарушая при этом условий допустимости плана. Из клеток Таблицы 11, со знаком «-» выбираем ту, где наименьший объем перевозки: это клетка (1;3) со значением перевозки 30 т.

Данный объем перемещаем по контуру, результаты представлены в таблице 19.

Таблица 19 – Новый план возврата порожних автомобилей

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	<i>A<sub>1</sub></i>	<i>A<sub>2</sub></i>	<i>A<sub>3</sub></i>	
<i>B<sub>1</sub></i>	20	29	6	150
	<b>150</b>	0	0	
<i>B<sub>2</sub></i>	23	15	11	140
	<b>140</b>	0	0	
<i>B<sub>3</sub></i>	20	16	10	110
	<b>0 -</b>	<b>+ 110</b>	0	
<i>B<sub>4</sub></i>		19	9	230
	<b>30 +</b>	<b>- 170</b>	<b>30</b>	
<i>B<sub>5</sub></i>	24	29	8	220
	0	0	<b>220</b>	
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

$$P = 150 \cdot 20 + 140 \cdot 23 + 30 \cdot 15 + 110 \cdot 16 + 170 \cdot 19 + 30 \cdot 9 + 220 \cdot 8 = 13690000,0 \text{ т} \cdot \text{км}.$$

Повторно путем построения цикла определяем оценку каждой свободной клетки, результат представлен ниже:

$$\Delta_{1;3} = 20 - 16 + 19 - 15 = 8; \Delta_{1;5} = 24 - 15 + 9 - 8 = 10; \Delta_{2;1} = 29 - 20 + 15 - 19 = 5;$$

$$\Delta_{2;2} = 15 - 23 + 15 - 19 = -12; \Delta_{2;5} = 29 - 19 + 9 - 8 = 11; \Delta_{3;1} = 6 - 20 + 15 - 9 = -8;$$

$$\Delta_{3;2} = 11 - 23 + 15 - 9 = -6; \Delta_{3;3} = 10 - 16 + 19 - 9 = 4.$$

План не оптимален, так как имеются клетки с отрицательной оценкой, наибольшая по модулю отрицательная оценка в клетке 2;2 (-12). Необходимо занять эту клетку объемом перевозки, не нарушая при этом условий допустимости плана.

Представим цикл для клетки (2;2) (Таблица 20).

Таблица 20 – Оценка свободной клетки (2;2)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 140 -	15 + 0	11 0	140
$B_3$	20 0	16 110	10 0	110
$B_4$	15 30 +	19 - 170	9 30	230
$B_5$	24 0	29 0	8 220	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Из таблицы 20, из клеток, находящихся по контуру, выбираем ту клетку со знаком «-», где наименьший объем перевозки: клетка (1;2) со значением перевозки 140 т и перемещаем этот объем по контуру, результаты представим в Таблице 21.

Таблица 21 – Новый план возврата порожних автомобилей

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 150	29 0	6 0	150
$B_2$	23 0 -	15 + 140	11 0	140
$B_3$	20 0	16 110	10 0	110
$B_4$	15 170 +	19 - 30	9 30	230
$B_5$	24 0	29 0	8 220	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

$$P = 150 \cdot 20 + 140 \cdot 15 + 110 \cdot 16 + 170 \cdot 15 + 30 \cdot 19 + 30 \cdot 9 + 220 \cdot 8 = 12010000,0 \text{ т} \cdot \text{км}.$$

Заново путем построения цикла определяем оценку каждой свободной клетки, результат представлен ниже:

$$\Delta_{1,2} = 23 - 15 + 19 - 15 = 12; \Delta_{1,3} = 20 - 16 + 19 - 15 = 8; \Delta_{1,5} = 24 - 15 + 9 - 8 = 10;$$

$$\Delta_{2,1} = 29 - 20 + 15 - 19 = 5; \Delta_{2,5} = 29 - 19 + 9 - 8 = 11; \Delta_{3,1} = 6 - 20 + 15 - 9 = -8;$$

$$\Delta_{3,2} = 11 - 15 + 19 - 9 = 6; \Delta_{3,3} = 10 - 16 + 19 - 9 = 4.$$

План вновь не оптимален, так как имеется клетка (3;1) с отрицательной оценкой (-8). Представим цикл для клетки (3;1) (Таблица 22).

Таблица 22 – Оценка свободной клетки (3;1)

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т	
	$A_1$	$A_2$	$A_3$		
$B_1$	150 -	20	29	6	150
$B_2$	0	23	15	11	140
$B_3$	0	20	16	10	110
$B_4$	170 +	15	19	9	230
$B_5$	0	24	29	8	220
<b>Запасы груза, т</b>	320	280	250	<b>220</b>	<b>850</b>

Заполняем клетку объемом перевозки 30 т (Таблица 22). Из клеток, находящихся по контуру, выбираем ту клетку со знаком «-», где наименьший объем перевозки: клетка (3;4) со значением перевозки 30 т и перемещаем этот объем по контуру, результаты представим в Таблице 23.

Таблица 23 – Новый план возврата порожних автомобилей

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т	
	$A_1$	$A_2$	$A_3$		
$B_1$	120 -	20	29	6	150
$B_2$	0	23	15	11	140
$B_3$	0	20	16	10	110
$B_4$	200 +	15	19	9	230
$B_5$	0	24	29	8	220
<b>Запасы груза, т</b>	320	280	250	<b>220</b>	<b>850</b>

$$P = 120 \cdot 20 + 30 \cdot 6 + 140 \cdot 15 + 110 \cdot 16 + 200 \cdot 15 + 30 \cdot 19 + 220 \cdot 8 = 11770000,0 \text{ т} \cdot \text{км.}$$

Заново путем построения цикла определяем оценку каждой свободной клетки, результат представлен ниже:

$$\Delta_{1,2} = 23 - 15 + 19 - 15 = 12; \Delta_{1,3} = 20 - 16 + 19 - 15 = 8; \Delta_{1,5} = 24 - 20 + 6 - 8 = 2;$$

$$\Delta_{2,1} = 29 - 20 + 15 - 19 = 5; \Delta_{2,5} = 29 - 19 + 15 - 20 + 6 - 8 = 3; \Delta_{3,2} = 11 - 6 + 20 - 15 + 19 - 15 = 14;$$

$$\Delta_{3,3} = 10 - 6 + 20 - 15 + 19 - 16 = 12; \Delta_{3,4} = 9 - 6 + 20 - 15 = 8.$$

После проведенного расчета оценок свободных клеток, можно сделать вывод, что полученный план является оптимальным (Таблица 24), так как нет ни одной оценки свободной клетки с отрицательным значением.

Таблица 24 – Оптимальный план возврата порожних автомобилей

Магазины (грузополучатели)	Поставщики (грузоотправители)			Потребности груза, т
	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
$B_1$	20 <b>120</b>	29 0	6 <b>30</b>	150
$B_2$	23 <b>0</b>	15 <b>140</b>	11 0	140
$B_3$	20 <b>0</b>	16 <b>110</b>	10 0	110
$B_4$	15 <b>200</b>	19 <b>30</b>	9 <b>0</b>	230
$B_5$	24 0	29 0	8 <b>220</b>	220
<b>Запасы груза, т</b>	<b>320</b>	<b>280</b>	<b>250</b>	<b>850</b>

Оптимальный план возврата порожних автомобилей обеспечивает минимальную выработку в тонно-километрах, в данном случае  $P = 11770000,0$  т·км, полученное значение соответствует минимальным затратам на перевозку. Указанный план соответствует критерию оптимизации, выраженному формулой 2.

Ранее на основе исходных данных этой задачи была решена ТЗЛП следующими методами: опорный план был составлен методом минимального элемента (наименьшей стоимости), а оптимальный план методом потенциалов. Результаты решений представим в таблице 25.

Таблица 25 – Результаты решения ТЗЛП

Методы построения опорного плана		
Критерии сравнения	Метод наименьшей стоимости	Метод северо-западного угла
Количество итераций, ед.	32	32
Трудоемкость, человеко-часов	0,33	0,25
Полученный результат, т·км	12040000,0	13930000,0
Методы построения оптимального плана		
Критерии сравнения	Метод потенциалов	Распределительный метод
Количество итераций, ед.	93	189
Трудоемкость, человеко-часов	1,5	2,5
Полученный результат, т·км	11770000,0	11770000,0

По результатам таблицы 25 можно сделать выводы:

1. Количество итераций при нахождении опорного плана методом наименьшей стоимости и методом северо-западного угла одинаковое.

2. Трудоемкость при нахождении опорного плана методом наименьшей стоимости в 1,32 раза выше, чем при нахождении опорного плана методом северо-западного угла.

3. Полученный результат методом наименьшей стоимости и методом северо-западного угла различается, при нахождении опорного плана методом наименьшей стоимости результат составляет 12040000,0 т·км, при нахождении

опорного плана методом северо-западного угла результат больше и составляет 13930000,0 т·км.

4. Количество итераций при нахождении оптимального плана методом потенциалов вдвое меньше, чем количество итераций при нахождении оптимального плана распределительным методом.

5. Трудоемкость расчетов при нахождении оптимального плана распределительным методом на 60% выше, чем методом потенциалов.

6. Полученный при нахождении оптимального плана результат, выраженный в тонно-километрах, одинаков при использовании обоих методов: метода потенциала и распределительного метода.

### Библиографический список

*Аникин, Б. А.* Логистика. М.: Проспект, 2016. 406 с.

*Афанасьев, Л. Л.* Автомобильные перевозки: учеб. для автомоб.-дор. техникумов по специальности «Техн. обслуживание и ремонт автомобилей». М.: Трансп., 1965. 351 с.

*Витвицкий, Е. Е.* Модель функционирования совокупности малых ненасыщенных автотранспортных систем с учетом неравномерности работы автотранспортных средств / Е. Е. Витвицкий, Е. С. Федосеев. Серия конференций ИОР: Материаловедение и инженерия. 2019. Том 560 (1), № 012205, 1-7, DOI: 10.1088 / 1757 -899X / 560/1/012205

*Гаджинский, А. М.* Логистика: учеб. для высших учебных заведений по направлению подготовки «Экономика». М.: Дашков и К°, 2015. 420 с.

*Дыбская, В. В.* Логистика складирования: учебник. М.: Инфра-М, 2012. 557 с.

*Дыбская, В. В.* Логистика: интеграция и оптимизация логистических бизнес-процессов в целях поставок. М.: Эксмо, 2014. 939 с.

*Крылова, К.* Оперативное планирование перевозки грузов автотранспортом с почасовой оплатой / К. Крылова, Е. Витвицкий. Серия конференций ИОР: Earthand Environment Science, 2019. Vol 403 (1). № 012227, 1-7, DOI: 10.1088 / 1755-1315 / 403 / 1/012227

*Мельников, В. П.* Логистика / В. П. Мельников, А. Г. Схирладзе, А. К. Антонюк. М.: Юрайт, 2016. 288 с.

*Миротин, Л. Б.* Транспортная логистика: учеб. для вузов / под общей ред. Л. Б. Миротина. М.: Изд-во «Экзамен», 2003. 512 с.

*Палий И. А.* Введение в линейное программирование: учеб. пособие. Омск: СибАДИ, 2007. 200 с.

Прогноз научно-технологического развития Российской Федерации на период до 2030 года (утв. Правительством РФ) // [Электронный ресурс]. – 2014 URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70484380/> (дата обращения: 01.11.2020).

Проектирование автотранспортных систем доставки грузов / В. И. Николин, С. М. Мочалин, Е. Е. Витвицкий [и др.] / под ред. проф. В. И. Николина. Омск: СибАДИ, 2001. 184 с.

*Bogdan, M.* (2018). Multiple solutions in linear programming problem. *Procedia Manufacturing*. 22: 1063–1068. doi:10.1016/j.promfg.2018.03.151 (In English).

*Dantzig, G.* Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, 1963. 656 p.

*Sarder, M.* Logistics transportation problems with linear programming. *Logistics Transportation Systems*. 2021, Pp. 137–167. doi:10.1016/b978-0-12-815974-3.00006-x

### References

*Afanasyev, L. L.* (1965). Automobile transportation: Textbook. for auto-road technical schools specializing in «Techn.maintenance and repair of cars». Moscow: Trans., 351 p. (In Russian).

*Anikin, B. A.* (2016). Logistics. Moscow: Prospect, 406 p. (In Russian).

- Bogdan, M.* (2018). Multiple solutions in linear programming problem. *Procedia Manufacturing*. 22: 1063–1068. doi:10.1016/j.promfg.2018.03.151 (In English).
- Dantzig, G.* (1963). *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 656 p. (In English).
- Design of road transport systems for the delivery of goods / V. I. Nikolin, S. M. Mochalin, E. E. Vitvitskiy [and others] / ed. prof. IN AND. Nikolina. Omsk: SibADI, 2001.184 p. (In Russian).
- Dybskaya, V. V.* (2014). *Logistics: integration and optimization of logistics business processes for supply purposes*. Moscow: Eksmo, 939 p. (In Russian).
- Dybskaya, V. V.* (2012). *Warehousing logistics: textbook*. Moscow: Infra-M, 557 p. (In Russian).
- Forecast of scientific and technological development of the Russian Federation for the period up to 2030 (approved by the Government of the Russian Federation) // [Electronic resource]. – 2014/ URL: <https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/70484380/> (date of access: 01.11.2020). (In Russian).
- Gadzhinsky, A. M.* (2015). *Logistics: a textbook for higher educational institutions in the direction of training «Economics»*. Moscow.: Dashkovi K°, 2015. 420 p. (In Russian).
- Krylova, K., Vitvitskiy E.* (2019). Operational planning of cargo transportation by motor vehicles used on hourly payment conditions. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. Vol 403 (1), № 012227: 1-7. DOI: 10.1088/1755-1315/403/1/012227 (In Russian).
- Melnikov, V. P., Shirladze, A.G., Antonyuk. A. K.* (2016). *Logistics*. Moscow: Yurayt, 288 p. (In Russian).
- Mirotin, L. B.* (2003). *Transport logistics: textbook for universities* / ed. L. B. Mirotin. Moscow: Publishing house «Exam», 512 p. (In Russian).
- Paliy, I. A.* (2007). *Introduction to Linear Programming: A Tutorial*. Omsk: SibADI, 200 p. (In Russian).
- Sarder, M.* (2021). Logistics transportation problems with linear programming. *Logistics Transportation Systems*. Pp. 137-167. doi:10.1016/b978-0-12-815974-3.00006-x (In English).
- Vitvitskiy, E. E., Fedoseenkova, E. S.* (2019). The model of functioning of a set of small auto transport systems with unstable operation of vehicles. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. Vol 560 (1), № 012205: 1-7. DOI: 10.1088/1757-899X/560/1/012205 (In Russian).