

УДК 621.396.96

DOI 10.51955/2312-1327_2025_3_35

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАРШРУТА ОБХОДА ВОЗДУШНЫМ СУДНОМ ГРОЗЫ МЕТОДОМ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО ПУТИ НА ГРАФЕ

*Геннадий Владимирович Коваленко,
orcid.org/0000-0002-4849-8878,
доктор технических наук, профессор
Санкт-Петербургский государственный университет
гражданской авиации имени Главного маршала авиации А.А. Новикова,
ул. Пилотов, 38
Санкт-Петербург, 196210, Россия
kgvf@inbox.ru*

*Илья Александрович Ядров,
orcid.org/0009-0007-3978-6345,
аспирант
Санкт-Петербургский государственный университет
гражданской авиации имени Главного маршала авиации А.А. Новикова,
ул. Пилотов, 38
Санкт-Петербург, 196210, Россия
yadrov.ilya@gmail.com*

Аннотация. В статье представлены результаты разработки метода определения оптимального маршрута обхода воздушным судном (ВС) постоянной во времени (неподвижной) зоны грозовой деятельности и сильных ливневых осадков, основанного на нахождении кратчайшего пути на графе, при построении которого учитываются геометрии опасных метеоявлений и минимальные безопасные расстояния до них. Приведено сравнение стратегий, основанных на использовании при формировании зон обхода грозы выпуклых и вогнутых оболочек. Установлено наличие статистически значимого различия в центральных тенденциях соответствующих длин маршрутов, а также показано, что маршруты, при построении которых используются вогнутые оболочки, в среднем на 2% короче, при возможных абсолютных различиях длин до нескольких сотен километров. Основной практический результат работы заключается в том, что предлагаемый метод определения оптимального маршрута обхода грозы может быть использован как инструмент повышения ситуационной осведомлённости пилотов ВС и оптимизации работы экипажа при выполнении полётов в условиях неблагоприятной метеорологической обстановки, может позволить осуществлять обход грозы в автоматическом режиме с использованием автопилота, а также может способствовать повышению экономической эффективности полётов в неблагоприятных метеорологических условиях за счёт сокращения расхода топлива благодаря выбору оптимального маршрута их обхода.

Ключевые слова: авиация, безопасность полётов, оптимизация, обход грозы, кратчайший путь на графе, алгоритм Дейкстры, минимальная оболочка.

METHOD FOR DETERMINING AN AIRCRAFT ROUTE TO AVOID A THUNDERSTORM USING THE SHORTEST PATH ON A GRAPH

*Gennadiy V. Kovalenko,
orcid.org/0000-0002-4849-8878,
Doctor of technical sciences, professor
St. Petersburg State University of Civil Aviation
named after Air Chief Marshal A.A. Novikov,
38, Pilotov
Saint-Petersburg, 196210, Russia
kgvf@inbox.ru*

*Ilya A. Yadrov,
orcid.org/0009-0007-3978-6345,
graduate student
St. Petersburg State University of Civil Aviation
named after Air Chief Marshal A.A. Novikov,
38, Pilotov
Saint-Petersburg, 196210, Russia
yadrov.ilya@gmail.com*

Abstract. The article presents the results of developing a method for determining the optimal route for bypassing an aircraft (AC) of a temporally constant (stationary) zone of thunderstorm activity and heavy rainfall. The method is based on finding the shortest path on a graph. It takes into account the geometries of hazardous meteorological phenomena and the minimum safe distances to them. The authors compare strategies based on the use of convex and concave hulls in the formation of thunderstorm bypass zones. The analysis reveals a statistically significant difference in the central tendencies of the corresponding route lengths. It demonstrates that routes using concave hulls are on average 2% shorter, with possible absolute differences in lengths of up to several hundred kilometers. The main practical result of the work is that the proposed method for determining the optimal route to avoid a thunderstorm can be used as a tool to increase the situational awareness of aircraft pilots and optimize crew operations when flying in adverse weather conditions. It allows automatic thunderstorm avoidance using an autopilot and contribute to improved economic efficiency of flights by reducing fuel consumption through the selection of the optimal bypass routes.

Keywords: aviation, flight safety, optimization, thunderstorm avoidance, shortest path on a graph, Dijkstra's algorithm, minimum envelope.

Введение (Introduction)

За последние десятилетия около 15-20% авиационных происшествий (АП) с транспортными воздушными судами (ВС) гражданской авиации (ГА), а также около 25-35% происшествий с ВС ГА авиации общего назначения (АОН) были вызваны неблагоприятными метеорологическими условиями полёта [Fultz et al., 2016, p. 299; Gultepe, 2023, p. 11; Nita et al., 2024, p. 5487], а в соответствии со статистикой, представленной Международной организацией гражданской авиации ИКАО в очередном отчёте о безопасности полётов [ICAO..., 2024, p. 15], основной причиной 39,4% авиационных инцидентов (26 из 66), произошедших в 2023 г., стали сложные погодные условия – турбулентность, сдвиг ветра и гроза. АП, связанные с попаданием ВС в зону грозовой деятельности и сильных ливневых осадков, в среднем составляют по различным оценкам 8-20% от числа происшествий, произошедших из-за сложных

метеоусловий, однако при этом в 60-70% случаев являются авиационными катастрофами, т. е. приводят к гибели людей (что значительно выше среднего уровня происшествий с летальным исходом по иным причинам [Boyd, 2017, p. 1068]), и в 90% случаев становятся причиной серьезных повреждений, либо полного разрушения ВС [Evans, 2013, p. 21; Fultz et al., 2016, p. 299].

Процесс принятия решения по выбору маршрута для обхода грозы – непростая задача, усложняющаяся необходимостью учитывать: 1) тенденцию развития грозового облака в ближайшем будущем; 2) скорость и направление движения ВС относительно грозового очага; а также 3) ограничения, установленные руководством по производству полётов авиакомпании, включая минимальное расстояние до грозового очага и минимальное расстояние от одного грозового очага до другого для безопасного пролета между ними (обход грозы сверху или снизу в настоящей работе не рассматривается). Нетривиальность процесса выбора оптимального способа обхода грозы подтверждается следующим:

1. Результаты экспериментов, описанных в работе¹, демонстрируют, что, находясь в одних и тех же условиях, члены экипажей ВС ГА могут принять кардинально различающиеся решения по обходу зоны грозовой активности (вплоть до полного отказа от выполнения полёта): этот факт свидетельствует об отсутствии унифицированного метода, позволяющего стандартизировать процесс выбора оптимального маршрута обхода грозы.

2. Результаты исследования АП с ВС АОН за период с 1996 по 2014 гг. в США [Boyd, 2017, p. 1069] показывают, что среди этих происшествий в 77% случаев в полёте пилоты не соблюдали установленные Федеральным управлением ГА (Federal Aviation Administration, FAA) ограничения на минимально допустимое расстояние до грозы, в том числе по причине недостаточного уровня теоретической подготовки в области авиационной метеорологии и правил полётов, а также неадекватной оценки интенсивности и опасности грозовых очагов.

Предполагается, что предоставление членам экипажа на экране навигационного дисплея консультативной информации о предлагаемом оптимальном (кратчайшем при соблюдении всех установленных ограничений) маршруте обхода грозы может способствовать повышению ситуационной осведомлённости пилотов и оптимизации процесса работы экипажа при выполнении полётов в сложных метеорологических условиях [Коваленко и др., 2025, с. 24], а также позволит осуществлять обход грозы в автоматическом режиме с использованием автопилота. Кроме того, предлагаемый метод определения оптимального маршрута обхода грозы может быть интегрирован в интеллектуальную адаптивную систему поддержки принятия экипажем ВС решений по обходу очагов грозовой деятельности [Kovalenko et al., 2023, p. 554], а также требует внедрения особой связанной с особенностями полета в

¹ Стрелков Ю. К. Инженерная и профессиональная психология: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: Издательский центр «Академия»; Высшая школа, 2001. 360 с.

неблагоприятных метеорологических условиях программы подготовки [Коваленко и др., 2023, с. 35].

Представим траекторию ВС в промежутке времени $t \in [0, T]$ как функцию от времени t :

$$\mathbf{s}(t) = [x(t), y(t)]^\top, t \in [0, T]. \quad (1)$$

Пусть ВС выполняет полёт из точки $\mathbf{s}(0) = A$ в точку $\mathbf{s}(T) = B$. Тогда задачу минимизации пути, пройденного из A в B , можно представить как:

$$L = \int_0^T \left\| \frac{d\mathbf{s}}{dt} dt \right\| \rightarrow \min. \quad (2)$$

Произведя дискретизацию по t на N достаточно небольших отрезков, перейдем к множеству точек $\left\{ [x_i, y_i]^\top \right\}_1^N = \left\{ [x_1, y_1]^\top, [x_2, y_2]^\top, \dots, [x_N, y_N]^\top \right\}$, задающих маршрут полёта ВС; при этом длина пути, пройденного из A в B , может быть рассчитана как:

$$L = \sum_{i=1}^{N-1} d_{i,i+1} = \left\| [x_{i+1}, y_{i+1}]^\top - [x_i, y_i]^\top \right\|. \quad (3)$$

Предположим, что ВС выполняет полёт в зоне грозовой деятельности, и в непосредственной близости от расчетной траектории полёта ВС находится множество изолированных грозовых очагов $\mathcal{T}$, каждый из которых имеет границу $T_k \in \mathcal{T}$ и соответствующую замкнутую область внутри этой границы R_k , которая может быть как выпуклой, так и невыпуклой.

В ходе выполнения полёта из A в B должны соблюдаться ограничения:

1. ВС при обходе зоны грозовых очагов не должно заходить в область грозы:

$$[x_i, y_i]^\top \notin R_k, \forall k \in \mathcal{T}, \forall i; \quad (4)$$

2. Кратчайшее расстояние от границы любого грозового участка T_k до маршрута обхода $d([x_i, y_i]^\top, T_k)$ в каждой его точке i не должно быть меньше минимально допустимого значения $d_{\min}$:

$$d([x_i, y_i]^\top, T_k) \geq d_{\min}, \forall k \in \mathcal{T}, \forall i; \quad (5)$$

3. Кратчайшее расстояние между границами двух любых грозовых участков T_k и T_m для пролёта между ними не должно быть меньше минимально допустимого значения d_{gap} (как правило, $d_{\text{gap}} > 2d_{\text{min}}$):

$$d(T_k, T_m) \geq d_{\text{gap}}, \forall k, m \in \mathcal{T}, k \neq m. \quad (6)$$

В соответствии с утратившим силу Приказом² об утверждении Федеральных авиационных правил полётов в воздушном пространстве Российской Федерации № 136/42/51, указанные минимально допустимые значения устанавливались равными $d_{\text{min}} = 15$ км и $d_{\text{gap}} = 50$ км.

Таким образом, рассматриваемая задача условной оптимизации может быть сформулирована следующим образом:

$$\| [x_{i+1}, y_{i+1}]^\top - [x_i, y_i]^\top \| \rightarrow \min; \quad (7)$$

$$[x_1, y_1]^\top = A, [x_N, y_N]^\top = B; \quad (8)$$

$$[x_i, y_i]^\top \notin R_k, \forall k \in \mathcal{T}, \forall i; \quad (9)$$

$$d([x_i, y_i]^\top, T_k) \geq d_{\text{min}}, \forall k \in \mathcal{T}, \forall i; \quad (10)$$

$$d(T_k, T_m) \geq d_{\text{gap}}, \forall k, m \in \mathcal{T}, k \neq m. \quad (11)$$

Существуют различные способы нахождения кратчайшего пути между двумя точками с обеспечением обхода препятствий с заранее известным местоположением: так, известны примеры решения указанной задачи с использованием линейного программирования [Bahreinian et al., 2021, p. 5035; Yilmaz, 2008, p. 522], методов нелинейной оптимизации [Eele et al., 2009, p. 384; Comparative ..., 2023, p. 487], методов случайных выборок (семплирования), таких как быстрорастущие случайные деревья (Rapidly-Exploring Random Trees) [Li et al., 2021, p. 283] и вероятностные дорожные карты (Probabilistic Roadmaps) [Ravankar et al., 2020, p. 221744].

В настоящей работе предлагается метод определения оптимального маршрута обхода зоны грозовой деятельности, основанный на нахождении кратчайшего пути на графе. К достоинствам применения метода, основанного на теории графов, по сравнению с указанными ранее алгоритмами можно отнести следующие [Agarwal et al., 2018, p. 31; Path planning ..., 2015, p. 10; Tan et al., 2021, p. 119322]:

1. Относительная простота и эффективность вычислений.
2. Возможность применения в ситуациях с множеством препятствий сложных форм и конфигураций.

² Приказ от 31 марта 2002 года № 136/42/51 об утверждении Федеральных авиационных правил полётов в воздушном пространстве Российской Федерации. Отменён с 1 января 2021 года на основании постановления Правительства Российской Федерации от 26 октября 2020 года № 1742.

3. Детерминированность и воспроизводимость при одних и тех же начальных условиях.

В настоящей работе представлено подробное описание предлагаемого метода, а также результаты его применения для нахождения оптимального маршрута полёта между двумя точками для реальных конфигураций грозовых очагов, а также результаты сравнения двух модификаций алгоритма для выбора лучшей из них.

Отметим, что в настоящей работе приведено описание метода, предназначенного для обхода грозовых очагов при условии их постоянства во времени (неподвижности).

Материалы и методы (Materials and methods)

Предлагаемый метод определения оптимального маршрута обхода зоны грозовой деятельности, основанный на нахождении кратчайшего пути на графе, состоит из этапов:

1. Получение данных о конфигурации грозовых очагов.
2. Предобработка и агрегация данных.
3. Создание графа и нахождение кратчайшего пути.

Создание и применение алгоритма оптимального обхода грозы, а также предшествующие этапы получения и обработки данных о расположении грозовых очагов и построение самого графа осуществлялись с использованием языка объектно-ориентированного программирования Python и библиотек: NumPy с поддержкой операций над многоуровневыми массивами, GeoPandas и Shapely для обработки геопространственных данных, а также NetworkX, предоставляющей инструменты для работы с графами и прочими сетевыми структурами. Созданный авторами в рамках исследования код находится в открытом доступе³.

1. Получение данных

Для разработки и тестирования алгоритма использовались данные⁴ радиолокационных метеорологических наблюдений за грозовыми очагами и сильными ливневыми осадками Финского метеорологического института (Finnish Meteorological Institute, FMI). Метеорологические наблюдения проводятся на базе сети FMI из 12 импульсно-доплеровских двухполяризационных радаров С-диапазона, покрывающих территорию Финляндии (рис. 1a); полученные с их помощью значения радиолокационной отражаемости Z (dBZ) переводятся в значения интенсивности пикселя I (число от 0 до 255), после чего картина радиолокационной обстановки хранится в открытом доступе в виде растрового черно-белого изображения формата geotiff. Получить значение Z на основе интенсивности пикселя I можно по формуле $Z = 0,5I - 32$. Растровый формат geotiff позволяет далее преобразовать растровое изображение в массив векторных фигур – геометрий – с сохранением

³ WxRADNet-PyTorch. URL: <https://github.com/yaaadrov/WxRADNet-PyTorch> (дата обращения: 25.06.2025)

⁴ FMI Open Data. URL: <http://fmi-opendata-radar-geotiff.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/?prefix=> (дата обращения: 25.06.2025)

информации о пространственном положении и координатах любой точки геометрии.

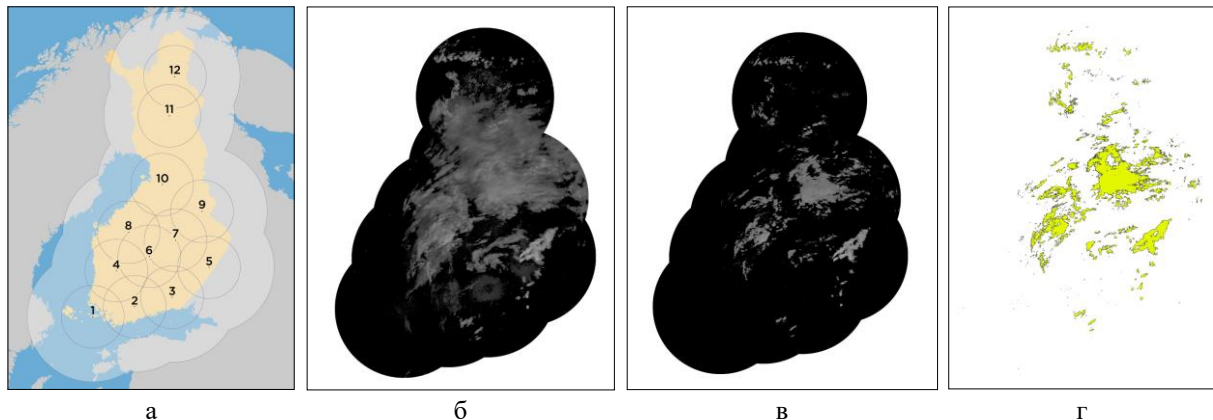


Рисунок 1 – Получение и предобработка данных о конфигурации грозовых очагов: а) покрытие сети радаров Финского метеорологического института⁵; б) растровое geotiff-изображение области грозовой деятельности за 09:15 01.07.2024; в) отфильтрованное растровое изображение; г) массив полигонов, полученный из отфильтрованного растрового изображения

Всего из множества наблюдений за период с 2022 по 2024 гг. для дальнейших работ по созданию и тестированию предлагаемого алгоритма нахождения оптимального маршрута обхода грозы было отобрано 25 конфигураций, отличающихся наличием обширных зон грозовой деятельности сложных форм, что значительно усложняло бы процесс их обхода пилотом в полёте.

2. Предобработка и агрегация данных

На этапе предобработки данных происходит загрузка растрового geotiff-изображения (рис. 1б), соответствующего определенной конфигурации грозовых очагов, а также фильтрация облаков, не относящихся к грозовым, и помех, вызванных наличием в воздухе в момент наблюдения отражающих объектов, не связанных с осадками (например, птиц): для этого пиксели со значениями интенсивности I менее 100 (с отражаемостью Z менее 20 dBZ, что соответствует слабому дождю) заменяются на 0, что, тем не менее, не приводит к потере информации о сильных ливневых осадках (рис. 1в). Отфильтрованное растровое изображение затем преобразуется в массив полигонов P_k [Geospatial Data Analysis..., 2024, p. 76] (рис. 1г) – векторных объектов, позволяющих производить над собой различные операции геометрического анализа (объединение, пересечение, проверка принадлежности точек и т. д.), таким образом, что все соседние пиксели с ненулевыми значениями интенсивности объединяются в единый полигон, а нулевые пиксели при этом отбрасываются. В итоге каждому грозовому очагу $T_k \in \mathcal{T}$ соответствует свой полигон P_k .

⁵ FMI Radar Network. URL: <https://en.ilmatieteenlaitos.fi/fmi-radar-network> (дата обращения: 21.03.2025)

Для каждого из полученных таким образом полигонов P_k рассчитываются буферные зоны B_k – полигоны, охватывающие исходную геометрию с заданным значением отступа от её границы, – для двух значений отступов: 1) буфер $B_k^{\min}$ с отступом $d_{\min}$, где $d_{\min}$ – минимальное допустимое расстояние от ВС до границы грозового очага (изображены серым на рис. 2а); а также 2) буфер B_k^{gap} с отступом $d_{\text{gap}} / 2$, где d_{gap} – минимальное расстояние между любыми двумя очагами для обеспечения возможности пролёта между ними (как правило, $d_{\text{gap}} / 2 > d_{\min}$).

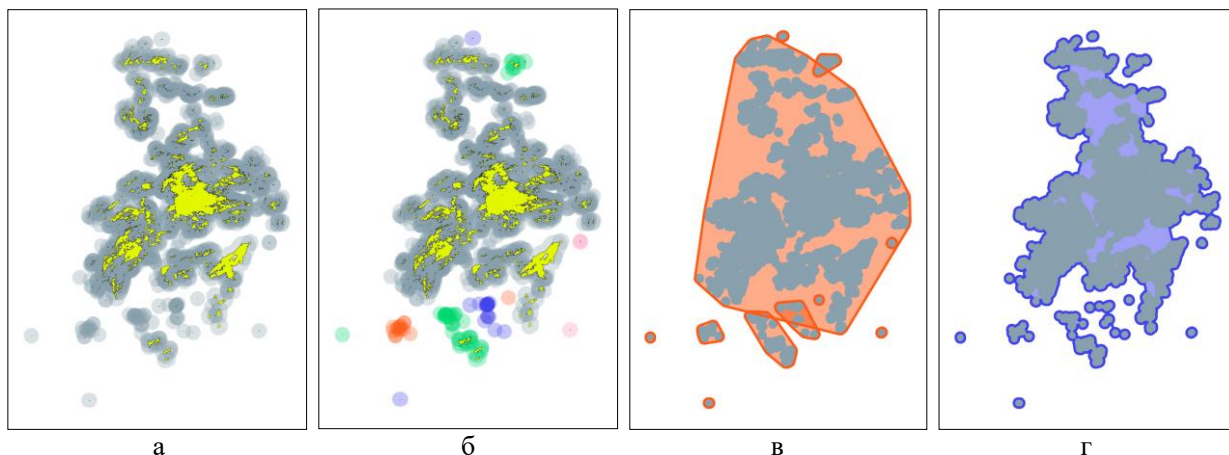


Рисунок 2 – Агрегация данных о грозовых очагах: а) буферные зоны B_k^{gap} с отступом $d_{\text{gap}} / 2$, построенные для каждого полигона; б) объединение попарно пересекающихся буферных зон в группы $\mathcal{G}_l$; в) выпуклые оболочки, построенные вокруг полученных групп для буферных зон $B_k^{\min}$; г) вогнутые оболочки, построенные вокруг полученных групп для буферных зон $B_k^{\min}$

В том случае, если для двух полигонов P_k и P_m соответствующие им буферные зоны B_k^{gap} и B_m^{gap} пересекаются $B_k^{\text{gap}} \cap B_m^{\text{gap}} \neq \emptyset$, то минимальное расстояние между этими полигонами меньше минимально допустимого значения d_{gap} и пролёт между соответствующими им очагами T_k и T_m невозможен в силу нарушения условия (11). С другой стороны, если объединить все такие полигоны с попарно пересекающимися буферными зонами в группы $\mathcal{G}_l = \{P_{l_1}, P_{l_2}, \dots\}$ (разделение полигонов и соответствующих им буферных зон показано на рис. 2б цветом) и убедиться, что маршрут ВС не проходит между любыми двумя полигонами $P_k, P_m \in \mathcal{G}_l$ из одной группы, то условие (11) будет выполнено автоматически.

Таким образом, далее для каждого P_k находятся полигоны, буферные зоны которых пересекают B_k^{gap} , и формируется граф $G(V^{\text{poly}}, E^{\text{poly}})$, в котором V^{poly} – множество вершин, состоящее из индексов всех полигонов, а E^{poly} – множество рёбер, которые между любыми двумя вершинами k и m присутствуют в том

случае, если $B_k^{\text{gap}} \cap B_m^{\text{gap}} \neq \emptyset$. С помощью полученного графа $G(V^{\text{poly}}, E^{\text{poly}})$ не составляет труда разделить все полигоны P_k на группы $\mathcal{G}_l$, каждая из которых соответствует некоторой компоненте связности графа. При этом, если для некоторого P_k не нашлось ни одного пересечения вида $B_k^{\text{gap}} \cap B_m^{\text{gap}}$, будем считать, что этот полигон образует собственную группу $\{P_k\}$.

Для объединения полигонов из одной группы в единую геометрию могут использоваться два подхода: в рамках обоих прежде всего из всех полигонов группы извлекаются массивы точек, задающих границу полигона, а затем для этих точек строится: 1) выпуклая оболочка (convex hull); либо 2) вогнутая оболочка (concave hull).

Пусть S – конечное множество точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда выпуклая оболочка $\text{Conv}(S)$ представляет собой минимальный выпуклый многоугольник, содержащий все точки множества S [Chaerani et al., 2021, p. 012075]. Существует множество алгоритмов нахождения минимальной выпуклой оболочки [Jayaram et al., 2016, p. 48] (например, алгоритмы Джарвиса, Грэхема, Чана и т. д.), и ее построение для множества точек не вызывает затруднений.

Тем не менее, минимальная выпуклая оболочка часто плохо аппроксимирует форму множества точек, так как игнорирует его вогнутые участки. Вогнутая оболочка $\text{Conc}(S)$, в свою очередь, представляет собой более гибкую границу, которая [A concave..., 2010, p. 2431]:

- 1) содержит все точки множества S , т. е. является его замкнутой оболочкой;
- 2) в отличие от выпуклой оболочки может иметь вогнутые участки;
- 3) зависит от параметра сглаживания α , определяющего степень вогнутости.

Для нахождения $\text{Conc}(S)$ может быть использован метод, основанный на алгоритме k -ближайших соседей (k -Nearest Neighbors, k -NN) [Park et al., 2012, p. 596], или, например, алгоритм α -shape [Asaeedi et al., 2017, p. 51]. В настоящем исследовании использовалась данная⁶ реализация concave hull-алгоритма с эмпирически подобранным параметром $\alpha = 1$.

На этапе предобработки и агрегации данных для каждой группы полигонов $\mathcal{G}_l$ строилась своя оболочка H_l – выпуклая H_l^{conv} (рис. 2в) и вогнутая H_l^{conc} (рис. 2г). Важно отметить, что оболочки строятся не для самих полигонов, но для соответствующих им буферных зон B_k^{min} : это сделано для того, чтобы в дальнейшем при нахождении кратчайшего маршрута учесть условие (10), требующее от ВС в течение всего обхода находиться на расстоянии не менее d_{min} до границ грозовых очагов.

⁶ Concave Hull. URL: <https://concave-hull.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 25.06.2025)

Таким образом, предлагаемый способ объединения отдельных полигонов грозовых очагов в группы $\mathcal{G}_l$ позволяет перейти от задачи оптимизации (7)-(11) к задаче со следующими условиями, которые будут сформулированы уже не для каждой точки пути обхода и границ изолированных грозовых очагов, а для поворотных пунктов маршрута и оболочек H_l :

1. Маршрут обхода должен начинаться в заданной точке A и заканчиваться в заданной точке B , таких, что они лежат за пределами оболочек $\{H_l\}_{l=1}^L$.

2. Ни один из участков маршрута между любыми двумя последовательными поворотными пунктами не должен пересекать границы оболочек $\{H_l\}_{l=1}^L$.

3. Создание графа и нахождение кратчайшего пути

В предлагаемом алгоритме нахождения оптимального маршрута обхода грозы создание графа реализовано следующим образом:

1. Вокруг каждой из оболочек H_l (выпуклой H_l^{conv} либо вогнутой H_l^{conc}) строится дополнительный буфер B_l^{hull} с небольшим (в несколько км) отступом d_{hull} .

2. Границы каждой буферной зоны B_l^{hull} упрощаются⁷ – для этого применяется алгоритм Дугласа-Пекера [Saalfeld, 1999, p. 9], рекурсивно удаляющий точки, задающие границы буфера, минимально влияя на его форму и сохраняя его общую структуру практически неизменной. В результате каждая из буферных зон B_l^{hull} представляется в виде множества характерных точек $\mathcal{H}_l$: $\mathcal{H}_l^{\text{conv}}$ для выпуклых оболочек (рис. 3а) или $\mathcal{H}_l^{\text{conc}}$ для вогнутых (рис. 3в).

3. Инициализируется граф $G(V^{\text{hull}}, E^{\text{hull}})$, множество вершин которого V^{hull} представляет собой объединение: 1) множества точек, задающих границу буферных зон; и 2) множества, состоящего из начальной и конечной точек маршрута, т. е. $V^{\text{hull}} = \mathcal{H}_l \cup \{A, B\}$. Упрощение границ буферной зоны (п. 2) было произведено с целью снизить число вершин графа, упростив, таким образом, вычисления по нахождению валидных (т. е. не пересекающих геометрии $\{H_l\}_{l=1}^L$) рёбер графа.

4. Далее для каждой пары вершин графа $V_p^{\text{hull}}, V_q^{\text{hull}}$ проверяется, пересекает ли данный отрезок хотя бы одну из геометрий $\{H_l\}_{l=1}^L$, и если нет, то соответствующее ребро E_{pq}^{hull} считается валидным и добавляется в граф (валидные рёбра графа показаны зелёным на рис. 3б и рис. 3г для выпуклой и вогнутой оболочек соответственно), при этом вес ребра определяется как

⁷ Для данной операции используется реализованный в модуле GeoPandas метод «simplify» с эмпирически подобранным для решаемой задачи значением параметра «tolerance», равным 5000.

расстояние между двумя его вершинами. Отметим также, что построение дополнительной буферной зоны B_l^{hull} с небольшим отступом вокруг каждой из оболочек H_l (п. 1) сделано для того, чтобы рёбра между двумя соседними вершинами, принадлежащими одному и тому же грозовому очагу, не пересекались с соответствующей геометрией оболочки H_l .

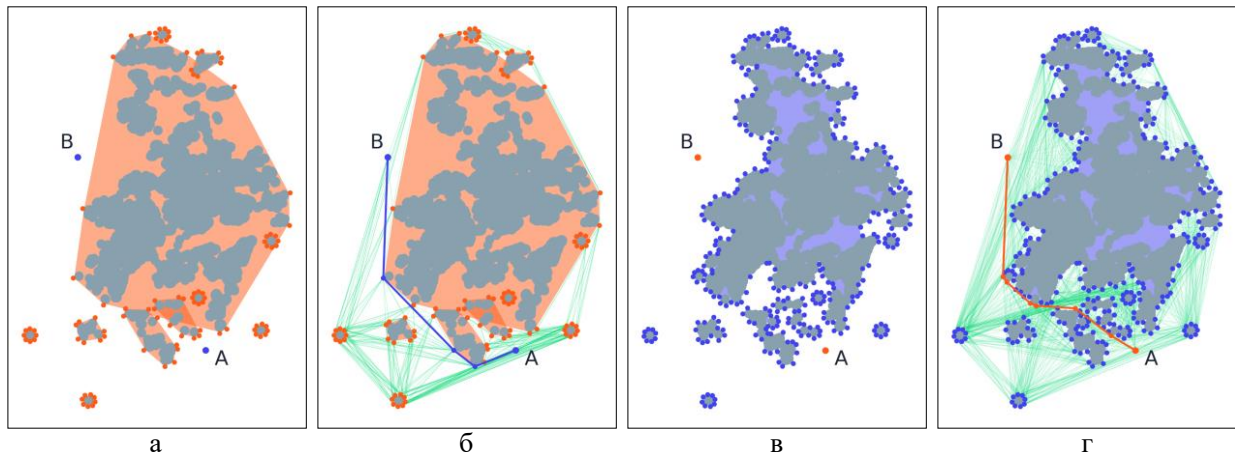


Рисунок 3 – Создание графа и нахождение кратчайшего пути: а) точки A и B и множество точек $\mathcal{H}_l^{\text{conv}}$, приближающих границу выпуклых оболочек; б) вершины графа для выпуклых оболочек и кратчайший путь из A в B на графе; в) точки A и B и множество точек $\mathcal{H}_l^{\text{conc}}$, приближающих границу вогнутых оболочек; г) вершины графа для вогнутых оболочек и кратчайший путь из A в B на графе

Таким образом, задача определения оптимального способа обхода грозы сводится к нахождению кратчайшего пути на полученном взвешенном графе. Для этого могут использоваться различные алгоритмы [A survey of..., 2017, p. 2], наиболее популярный из них – алгоритм Дейкстры [Rachmawati et al., 2020, p. 4], который и применён в настоящей работе.

Найденный кратчайший путь на графе – массив его вершин от точки A до точки B с известными координатами всех полученных поворотных пунктов – представляет собой предлагаемый оптимальный маршрут обхода зоны грозовой деятельности (оптимальный маршрут показан синим на рис. 3б и красным на рис. 3г).

Результаты (Results)

Предлагаемый метод определения оптимального маршрута обхода зоны грозовой деятельности был применён для каждой из 25 конфигураций грозовых очагов, отобранных на этапе получения данных, как для случая обхода области, полученной из выпуклых оболочек, так и для обхода области, полученной из вогнутых оболочек, для различных начальных и конечных точек маршрута. Начальные и конечные точки для экспериментов выбирались следующим образом:

1. Вокруг множества буферных зон $\{B_k^{\text{gap}}\}_{k=1}^K$ строилась ограничительная рамка (bounding box) [Dinas et al., 2015, p. 54] (показана пунктиром на рис. 4а и 4б) – наименьший прямоугольник, содержащий в себе каждую геометрию из множества $\{B_k^{\text{gap}}\}_{k=1}^K$.

2. Выбирались 4 пары начальных и конечных точек: 1) противоположные вершины ограничительной рамки (точки A_1, B_1, A_3 и B_3 на рис. 4а и 4б); и 2) точки, соответствующие серединам противоположных сторон ограничительной рамки (точки A_2, B_2, A_4 и B_4 на рис. 4а и 4б).

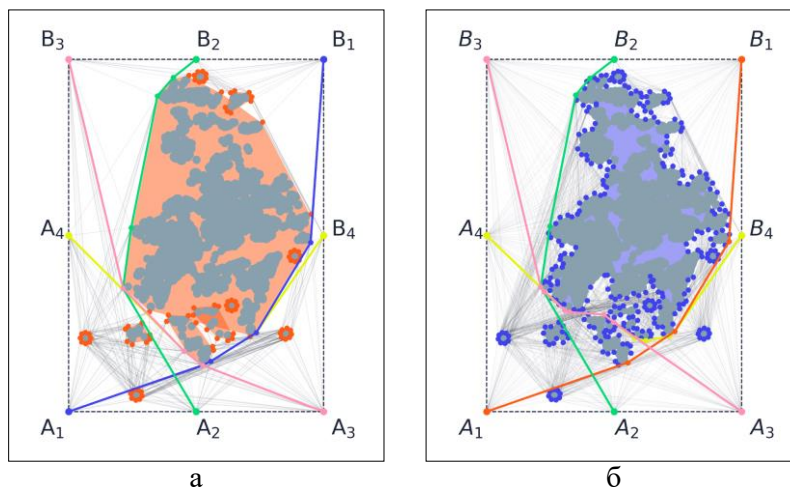


Рисунок 4 – Ограничительная рамка (bounding box) и оптимальные маршруты обхода для четырёх пар начальных и конечных точек: а) при обходе области, полученной из выпуклых оболочек; б) при обходе области, полученной из вогнутых оболочек

Всего, таким образом, было рассмотрено 100 случаев, причём для каждого из них (как для выпуклых, так и для вогнутых оболочек) полученные графы оказались связными, т. е. в них любые две вершины соединены ребром и, следовательно, можно было найти хотя бы один маршрут из начальной точки в конечную. Распределение длины маршрута обхода в зависимости от выбранной стратегии обхода – для области, полученной из выпуклых оболочек (convex), либо из вогнутых оболочек (concave), – приведено на рис. 5.

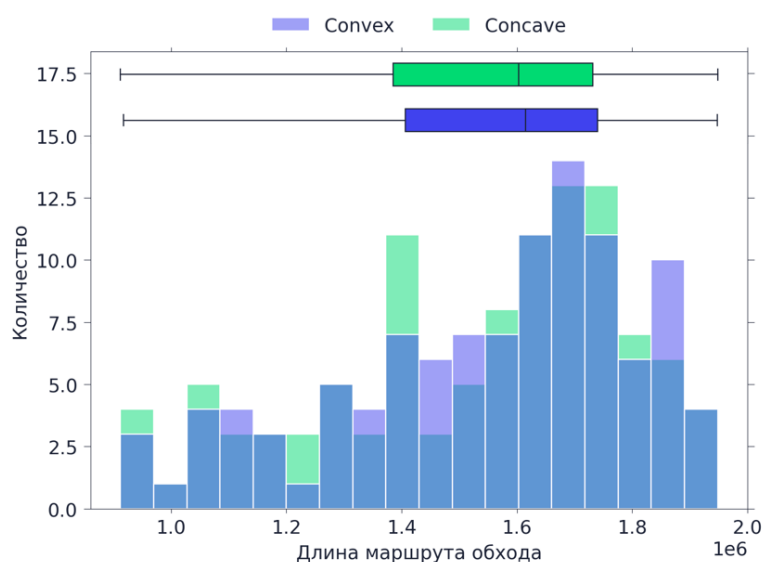


Рисунок 5 – Распределение длины маршрута обхода в зависимости от выбранной стратегии

Для 76 из 100 рассмотренных случаев длина маршрута при обходе зоны, образованной вогнутыми оболочками (concave-маршрут, средняя длина 1 530 км), в среднем меньше, чем длина маршрута при обходе зоны, образованной выпуклыми оболочками (convex-маршрут, средняя длина 1 548 км); эта закономерность заметна и на диаграмме, изображенной на рис. 5. Тем не менее, в среднем отношение длины concave-маршрута к длине convex-маршрута составляет $C\text{-ratio} = 0,98$ (медианное отношение равно 0,99) – это свидетельствует о незначительной разнице между длинами маршрутов для данных стратегий (в абсолютных величинах эта разница может достигать в рассматриваемых задачах нескольких десятков километров).

Примечателен случай, изображенный на рис. 6, для которого concave-маршрут оказался в 1,66 раз короче convex-маршрута (912 км для concave-маршрута против 1 515 км для convex-маршрута, что соответствует значению $C\text{-ratio} = 0,60$ и абсолютной разнице между маршрутами в 603 км): конфигурация грозовых очагов (рис. 6а) такова, что выпуклые оболочки двух наибольших по площади групп пересекаются (рис. 6б), что делает пролёт между ними невозможным. С другой стороны, в случае вогнутых оболочек данная проблема отсутствует, что позволяет значительно сократить путь из *A* в *B*.

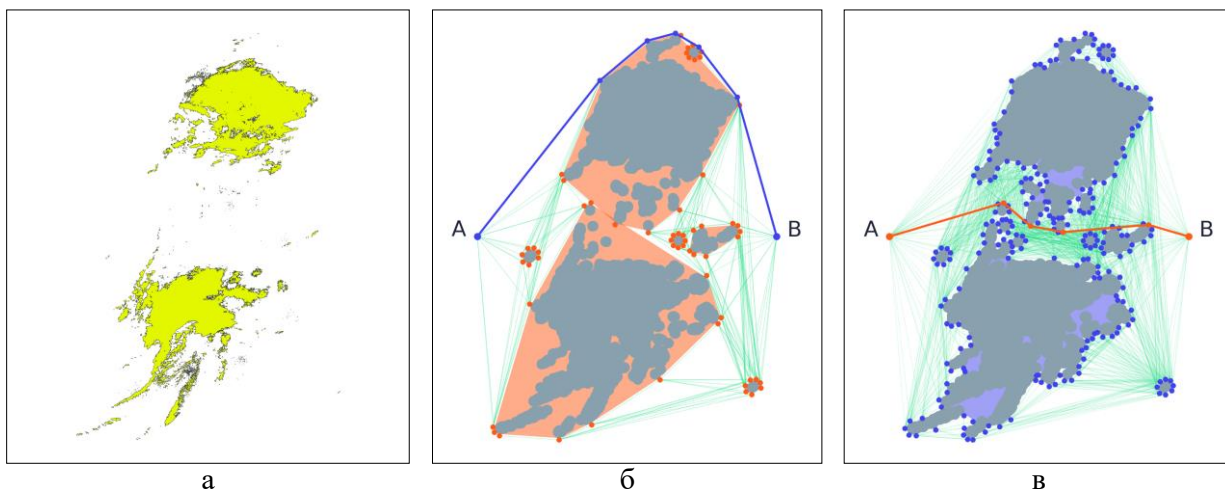


Рисунок 6 – Разница между convex- и concave-маршрутами может составлять до 40% длины большего из них: а) конфигурация грозовых очагов; б) convex-маршрут обхода данной конфигурации; в) concave-маршрут обхода данной конфигурации

Далее для каждого из рассматриваемых 100 случаев были найдены относительные разницы между длинами convex- и concave-маршрутов ΔL_{rel} :

$$\Delta L_{rel} = \frac{L_{conv} - L_{conc}}{(L_{conv} + L_{conc}) / 2},$$

где L_{conv} и L_{conc} – длины convex- и concave-маршрутов соответственно.

Результаты теста Шапиро-Уилка (Shapiro-Wilk test) [Das et al., 2016, p. 9] для проверки гипотезы о нормальности распределения ΔL_{rel} со значением уровня статистической значимости $\alpha = 0,05$ позволили сделать вывод о том, что данное распределение статистически значимо отличается от нормального (со значением p -уровня значимости $p = 3,22 \cdot 10^{-21}$). Следовательно, для проверки гипотезы о статистически значимом различии средних необходимо использовать непараметрический тест.

В настоящем исследовании для сравнения средних в силу парности данных был использован тест Уилкоксона для парных выборок (Wilcoxon signed-rank test) [Gerald et al., 2021, p. 78] со значением уровня статистической значимости $\alpha = 0,05$: результаты непараметрического теста позволили заключить, что медианная длина concave-маршрута статистически значимо отличается от медианной длины convex-маршрута со значением p -уровня значимости $p = 1,07 \cdot 10^{-7}$.

Обсуждение (Discussion)

Полученные результаты, свидетельствующие о наличии статистически значимого различия в центральных тенденциях L_{conv} и L_{conc} , могут быть проиллюстрированы рис. 4 и рис. 6. Действительно, в рассматриваемых примерах нередко встречаются пары грозовых очагов вогнутых форм,

расположенные таким образом, что построенные вокруг соответствующих им буферных зон выпуклые оболочки пересекаются, делая пролёт между данными грозовыми очагами невозможным, несмотря на то, что теоретически он допустим в силу выполнения условий (10) и (11) (рис. 4а и 6б). С другой стороны, такой проблемы не возникает в случае применения вогнутых оболочек, которые при определении границы группы из нескольких буферных зон учитывают их выпуклую структуру и более точно передают их форму, что является их очевидным преимуществом: так, маршруты A_3B_3 и A_4B_4 (рис. 4б), а также маршрут AB (рис. 6в) могут беспрепятственно пройти между несколькими буферными зонами вогнутой формы, что позволяет заметно сократить длину маршрута обхода по сравнению с соответствующими маршрутами на рис. 4а и 6б.

Тем не менее, использование для обхода зоны грозовой деятельности concave-стратегии связано и с некоторыми техническими недостатками:

1. Алгоритм построения вогнутой оболочки значительно сложнее, чем алгоритм построения выпуклой оболочки, – построение вогнутой оболочки требует больше времени и больше вычислительных ресурсов, причём тем больше, чем более сложной оказалась конфигурация буферных зон.

2. Из рис. 3 и 6 очевидно, что, в силу усложнения формы вогнутой оболочки по сравнению с выпуклой, на этапе упрощения границ оболочек («Создание графа и нахождение кратчайшего пути», п. 2) алгоритм Дугласа-Пекера выделяет для вогнутых оболочек куда большее по мощности множество точек $\mathcal{H}_i^{\text{conc}}$ (рис. 3в), нежели множество $\mathcal{H}_i^{\text{conv}}$ (рис. 3а), выделяемое для выпуклых оболочек, что, в свою очередь, увеличивает число вершин графа, и, следовательно, число рёбер, – так, при увеличении числа вершин в n раз число рёбер графа, требующих валидации («Создание графа и нахождение кратчайшего пути», п. 4), увеличивается в приблизительно n^2 раз: это значительно замедляет процесс валидации рёбер, а также (не настолько значительно) замедляет процесс поиска пути на графе, т. к. теперь он состоит из большего числа вершин и рёбер.

Кроме того, несмотря на безусловные преимущества concave-маршрута по сравнению с convex-маршрутом с точки зрения экономической эффективности полёта, сложно однозначно утверждать о его преимуществе с точки зрения безопасности: несмотря на то, что требования по соблюдению минимальных расстояний (10) и (11) полностью выполнены, маршруты A_3B_3 , A_4B_4 (рис. 4б) и AB (рис. 6в) проходят таким образом, что грозовые очаги остаются по обе стороны от них, – это является нежелательным по нескольким причинам:

1. При пролёте между двумя грозовыми очагами значительно увеличивается вероятность попадания ВС в зону турбулентности и сдвигов ветра [Turbulence characteristics..., 2021, p. 6; Wind shear..., 2024, p. 545], а также возрастает риск поражения ВС молнией или разрядом статического электричества [Hoole et al., 2022, p. 55; In-Flight Measurements..., 2025, p. 110038].

2. Неучёт тенденции развития грозы при выборе маршрута обхода может привести к ситуации, когда в момент пролёта между двумя близко расположенными грозовыми очагами они переместятся настолько близко друг к другу, что будет невозможно выполнить условие (11) о минимальном расстоянии d_{gap} между двумя грозовыми очагами для безопасного пролёта между ними: этот факт свидетельствует о необходимости при определении оптимального маршрута грозы учитывать также прогностическую информацию о предполагаемом изменении конфигурации грозовых очагов в ближайшем будущем [Kovalenko, 2023, p. 554], что выходит за рамки настоящей работы, однако дальнейшее развитие данного вопроса планируется осуществить в рамках будущих исследований. Кроме того, особого внимания заслуживает вопрос экспериментальной проверки предлагаемого метода на ВС [Муравьев, 2022, с. 20].

Как следует из показанного выше, выбор наилучшего маршрута грозы предполагает компромисс между безопасностью и экономической эффективностью полёта [Financial performance..., 2021, p. 149; Operational safety economics..., 2021, p. 105326], однако на настоящий момент не существует способа, позволявшего бы оценить безопасность маршрута, проходящего вблизи зоны грозовой деятельности: этот факт свидетельствует о необходимости создания некоторого критерия, который позволил бы стандартизировать процесс оценки того или иного маршрута обхода грозы с точки зрения безопасности полётов, и, таким образом, постановку задачи нахождения оптимального маршрута обхода можно было бы сформулировать не как «нахождение кратчайшего маршрута обхода среди всех возможных», но как «нахождение наиболее безопасного маршрута обхода среди кратчайших».

Заключение (Conclusion)

Таким образом, в настоящей работе предлагается метод определения оптимального маршрута обхода постоянного во времени (неподвижного) грозового фронта.

1. Математически формализована задача нахождения оптимального маршрута обхода грозы, основные требования к маршруту обхода представлены в виде задачи условной оптимизации (7)-(11).

2. При подготовке к исследованию получены данные радиолокационных метеорологических наблюдений за грозовыми очагами и сильными ливневыми осадками Финского метеорологического института за период с 2022 по 2024 гг.; данные размещены авторами в открытом доступе и могут использоваться для валидации результатов дальнейших исследований.

3. Предложен метод определения оптимального маршрута обхода как кратчайшего пути на взвешенном графе, вершины которого получаются после упрощения границ минимальных оболочек, построенных вокруг буферных зон грозовых очагов.

4. Предложены две стратегии построения графа – с использованием минимальных выпуклых (convex-маршрут) и вогнутых (concave-маршрут)

оболочек. Результаты непараметрического теста Уилкоксона для парных выборок со значением уровня статистической значимости $\alpha = 0,05$ позволили заключить, что медианная длина concave-маршрута статистически значимо отличается от медианной длины convex-маршрута со значением p -уровня значимости $p = 1,07 \cdot 10^{-7}$. В 76 из 100 рассматриваемых случаев длина concave-маршрута оказалась меньше длины convex-маршрута (в среднем на 2%, но в некоторых случаях это значение может достигать и 40%), однако усложнение формы вогнутой оболочки по сравнению с выпуклой приводит к увеличению числа точек, выступающих в качестве вершин графа (увеличении числа вершин в n раз приводит к увеличению числа требующих валидации рёбер графа в приблизительно n^2 раз), что значительно замедляет процесс валидации рёбер.

5. Основной практический результат работы заключается в том, что предоставление членам лётного экипажа ВС ГА на экране навигационного дисплея консультативной информации о предлагаемом оптимальном маршруте обхода грозы может способствовать повышению ситуационной осведомлённости пилотов и оптимизации процесса работы экипажа при выполнении полётов в сложных метеорологических условиях, а также может позволить осуществлять обход грозы в автоматическом режиме с использованием автопилота. Кроме того, предполагается возможность интеграции предложенного метода определения оптимального маршрута обхода грозы в интеллектуальную адаптивную систему поддержки принятия экипажем ВС решений по обходу очагов грозовой деятельности.

Полученные результаты предполагается развить в будущих исследованиях:

1. Пролёт между двумя достаточно близко расположенными грозовыми очагами может быть безопасно реализован только в случае наличия прогностической информации, гарантирующей, что в момент пролёта расстояние между их границами не станет меньше минимально допустимого: для этого необходимо, во-первых, реализовать способ предсказания развития грозовых очагов в ближайшем будущем и, во-вторых, обеспечить учёт этого развития при построении оптимального маршрута обхода.

2. Результаты, полученные в настоящей работе, свидетельствуют о необходимости создания критерия, позволившего бы обеспечить комплексную оценку того или иного маршрута обхода грозы с точки зрения безопасности полётов, таким образом, чтобы задачу нахождения оптимального маршрута обхода сформулировать не как «нахождение кратчайшего маршрута обхода среди всех возможных», но как «нахождение наиболее безопасного маршрута обхода среди кратчайших».

Библиографический список

Коваленко Г. В. Методология построения методики обучения пилотов по управлению высокоавтоматизированным воздушным судном с использованием когнитивно-информационных преобразователей алгоритмов деятельности / Г. В. Коваленко, И. С. Муравьев, К. А. Куц // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2023. № 1. С. 35-41. EDN: TMSQFR

Коваленко Г. В. Применение Seq2seq-моделей для прогнозирования развития грозовой деятельности с целью повышения уровня ситуационной осведомленности пилота в полете / Г. В. Коваленко, И. А. Ядров // Научный вестник МГТУ ГА. 2025. №1 (28). С. 20-38. DOI: 10.26467/2079-0619-2025-28-1-20-38. EDN: QMTDXA

Муравьев И. С. Экспериментальная проверка метода оценки функционирования автоматизированных систем на воздушных судах последнего поколения / И. С. Муравьев // Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык. 2022. № 3. С. 20-33. DOI: 10.51955/23121327_2022_3_20. EDN: FVZDIY

A concave hull algorithm for scattered data and its applications / J. Xu, Z. Zheng, Y. Feng, X. Qing // 2010 3rd International Congress on Image and Signal Processing. IEEE, 2010. № 5. P. 2430-2433. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/CISP.2010.5648277>

A survey of shortest-path algorithms / A. Madkour, W. G. Aref, F. U. Rehman, M. A. Rahman, S. Basalamah // arXiv preprint arXiv:1705.02044. 2017. 26 p.

Agarwal D. A review on comparative analysis of path planning and collision avoidance algorithms / D. Agarwal, P. S. Bharti // Algorithms. 2018. №30. P 31.

Asaeedi S. α -Concave hull, a generalization of convex hull / S. Asaeedi, F. Didehvar, A. Mohades // Theoretical Computer Science. 2017. № 702. P. 48-59. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.tcs.2017.08.014>

Bahreinian M. Robust path planning and control for polygonal environments via linear programming / M. Bahreinian, E. Aasi, R. Tron // 2021 American Control Conference (ACC). IEEE, 2021. P. 5035-5042. DOI: <http://dx.doi.org/10.23919/ACC50511.2021.9483196>

Boyd D. D. In-flight decision-making by general aviation pilots operating in areas of extreme thunderstorms // Aerospace Medicine and Human Performance. 2017. № 12 (88). P. 1066-1072. DOI: <http://dx.doi.org/10.3357/AMHP.4932.2017>

Chaerani D. A comprehensive survey on convex analysis in robust optimization / D. Chaerani, E. Rusyaman, K. R. A. Muslihin // Journal of Physics: Conference Series. 2021. № 1 (1722). P. 012075.

Comparative analysis of nonlinear programming solvers: performance evaluation, Benchmarking, and Multi-UAV optimal path planning / G. Lavezzi, K. Guye, V. Cichella, M. Ciarcià // Drones. 2023. № 8 (7). P. 487. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/drones7080487>

Das K. R. A brief review of tests for normality / K. R. Das, A. Imon // American Journal of Theoretical and Applied Statistics. 2016. № 1 (5). P. 5-12.

Dinas S. A literature review of bounding volumes hierarchy focused on collision detection / S. Dinas, J. M. Bañón // Ingeniería y Competitividad. 2015. № 1 (17). P. 49-62.

Eele A. Path-planning with avoidance using nonlinear branch-and-bound optimization / A. Eele, A. Richards // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2009. № 2 (32). P. 384-394. DOI: <http://dx.doi.org/10.2514/1.40034>

Evans J. K. An Examination of Aviation Accidents Associated with Turbulence, Wind Shear and Thunderstorm. 2013. 42 p.

Financial performance and safety in the aviation industry / P. Fardnia, T. Kaspereit, T. Walker, S. Xu // International Journal of Managerial Finance. 2021. Vol. 17. № 1. P. 138-165. DOI: <http://dx.doi.org/10.1108/IJMF-03-2019-0095>

Fultz A. J. Fatal weather-related general aviation accidents in the United States / A. J. Fultz, W. S. Ashley // Physical Geography. 2016. № 5 (37). P. 291-312. DOI: <http://dx.doi.org/10.1080/02723646.2016.1211854>

Geospatial Data Analysis: A Comprehensive Overview of Python Libraries and Implications / T. D. Bezabih, M. G. Glaety, D. A. Wako, S. G. Worku // Ethics, Machine Learning, and Python in Geospatial Analysis. 2024. P. 72-93. DOI <http://dx.doi.org/10.4018/979-8-3693-6381-2.ch004>

Gerald B. Parametric and nonparametric tests: A brief review / B. Gerald, T. F. Patson // International Journal of Statistical Distributions and Applications. 2021. № 3 (7). P. 78-82. DOI: <http://dx.doi.org/10.11648/j.ijstd.20210703.12>

Gultepe I. A review on weather impact on aviation operations: Visibility, wind, precipitation, icing // *Journal of Airline Operations and Aviation Management*. 2023. № 1 (2). P. 1-44. DOI: <http://dx.doi.org/10.56801/jaoam.v2i1.1>

Hoole P. R. P. Thunderstorms and Pre-lightning Electrostatics / P. R. P. Hoole, J. Fisher, S. R. H. Hoole // *Lightning Engineering: Physics, Computer-based Test-bed, Protection of Ground and Airborne Systems*. 2022. P. 51-83. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-030-94728-6_2

ICAO Safety Report. International Civil Aviation Organization. 2024. 29 p.

In-Flight Measurements of Lightning Locations Using an Aircraft-Mounted Lightning Mapper / Z. Milani, L. Nichman, E. Matida, L. Fleury, M. Wolde, E. Bruning, G. M. McFarquhar, P. Kollias // *Aerospace Science and Technology*. 2025. P. 110038. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ast.2025.110038>

Jayaram M. A. Convex hulls in image processing: a scoping review / M. A. Jayaram, H. Fleyeh // *American Journal of Intelligent Systems*. 2016. № 2 (6). P. 48-58.

Kovalenko G. V. Intelligent Adaptive Flight Crew Decision Support System for Thunderstorm Avoidance / G. V. Kovalenko, I. A. Yarov, K. A. Kuts // *Russian Aeronautics*. 2023. № 3 (66). P. 552-559. DOI: <http://dx.doi.org/10.3103/S1068799823030170>

Li B. An adaptive rapidly-exploring random tree / B. Li, B. Chen // *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 2021. № 2 (9). P. 283-294. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/JAS.2021.1004252>

Nita I. A. Aviation accidents related to atmospheric instability in the United States (2000–2020) / I. A. Nita, C. Radu, S. Cheval // *Theoretical and Applied Climatology*. 2024. № 6 (155). P. 5483–5497.

Operational safety economics: Foundations, current approaches and paths for future research / C. Chen, G. Reniers, N. Khakzad, M. Yang // *Safety Science*. 2021. Vol. 141. P. 105326. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1722/1/012075>

Park J. S. A new concave hull algorithm and concaveness measure for n-dimensional datasets / J. S. Park, S. J. Oh // *Journal of Information Science and Engineering*. 2012. № 3 (28). P. 587-600.

Path planning and trajectory planning algorithms: A general overview / A. Gasparetto, P. Boscariol, A. Lanzutti, R. Vidoni // *Motion and Operation Planning of Robotic Systems: Background and Practical Approaches*. 2015. P. 3-27. DOI: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-14705-5_1

Rachmawati D. Analysis of Dijkstra's algorithm and A* algorithm in shortest path problem / D. Rachmawati, L. Gustin // *Journal of Physics: Conference Series*. IOP Publishing, 2020. № 1 (1566). 7 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1566/1/012061>

Ravankar A. A. HPPRM: hybrid potential based probabilistic roadmap algorithm for improved dynamic path planning of mobile robots / A. A. Ravankar, A. Ravankar, T. Emaru, Y. Kobayashi // *IEEE Access*. 2020. Vol. 8. P. 221743-221766. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3043333>

Saalfeld A. Topologically consistent line simplification with the Douglas-Peucker algorithm // *Cartography and Geographic Information Science*. 1999. № 1 (26). P. 7-18. DOI: <http://dx.doi.org/10.1559/152304099782424901>

Tan C. S. A comprehensive review of coverage path planning in robotics using classical and heuristic algorithms / C. S. Tan, R. Mohd-Mokhtar, M. R. Arshad // *IEEE Access*. 2021. Vol. 9. P. 119310-119342. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3108177>

Turbulence characteristics of thunderstorms before the first flash in comparison to non-thunderstorms / C. Zhao, D. Zheng, Y. Zhang, X. Liu, Y. Zhang, W. Yao, W. Zhang // *Geophysical Research Letters*. 2021. Vol. 48. № 18. 10 p. DOI: <http://dx.doi.org/10.1029/2021GL094821>

Wind shear and aircraft aborted landings: A deep learning perspective for prediction and analysis / A. Khattak, J. Zhang, P. W. Chan, F. Chen, A. Hussain, H. Almujiabah // *Atmosphere*. 2024. Vol. 15. № 5. P. 545. DOI: <http://dx.doi.org/10.3390/atmos15050545>

Yilmaz N. K. Path planning of autonomous underwater vehicles for adaptive sampling using mixed integer linear programming // *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 2008. № 4 (33). P. 522-537. DOI: <http://dx.doi.org/10.1109/JOE.2008.2002105>

References

- Agarwal D., Bharti P. S. (2018). A review on comparative analysis of path planning and collision avoidance algorithms. *Algorithms*. 30: 31.
- Asaeedi S., Didehvar F., Mohades A. (2017). α -Concave hull, a generalization of convex hull. *Theoretical Computer Science*. 702: 48-59.
- Bahreini M., Aasi E., Tron R. (2021). Robust path planning and control for polygonal environments via linear programming. *2021 American Control Conference (ACC), IEEE*. 5035-5042.
- Bezabih T. D., Glaety M. G., Wako D. A., Worku S. G. (2024). Geospatial Data Analysis: A Comprehensive Overview of Python Libraries and Implications. *Ethics, Machine Learning, and Python in Geospatial Analysis*. 72-93.
- Boyd D. D. (2017). In-flight decision-making by general aviation pilots operating in areas of extreme thunderstorms. *Aerospace Medicine and Human Performance*. 88(12): 1066-1072.
- Chaerani D., Rusyaman E., Muslihin K. R. (2021). A comprehensive survey on convex analysis in robust optimization. *Journal of Physics: Conference Series*. 1722(1): 012075.
- Chen C., Reniers G., Khakzad N., Yang M. (2021). Operational safety economics: Foundations, current approaches and paths for future research. *Safety Science*. 141: 105326.
- Das K. R., Imon A. (2016). A brief review of tests for normality. *American Journal of Theoretical and Applied Statistics*. 5(1): 5-12.
- Dinas S., Bañón J. M. (2015). A literature review of bounding volumes hierarchy focused on collision detection. *Ingeniería y Competitividad*. 17(1): 49-62.
- Eele A., Richards A. (2009). Path-planning with avoidance using nonlinear branch-and-bound optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 32(2): 384-394.
- Evans J. K. (2013). An Examination of Aviation Accidents Associated with Turbulence, Wind Shear and Thunderstorm. 42 p.
- Fardnia P., Kaspereit T., Walker T., Xu S. (2021). Financial performance and safety in the aviation industry. *International Journal of Managerial Finance*. 17(1): 138-165.
- Fultz A. J., Ashley W. S. (2016). Fatal weather-related general aviation accidents in the United States. *Physical Geography*. 37(5): 291-312.
- Gasparetto A., Boscariol P., Lanzutti A., Vidoni R. (2015). Path planning and trajectory planning algorithms: A general overview. *Motion and Operation Planning of Robotic Systems: Background and Practical Approaches*. 3-27.
- Gerald B., Patson T. F. (2021). Parametric and nonparametric tests: A brief review. *International Journal of Statistical Distributions and Applications*. 7(3): 78-82.
- Gultepe I. (2023). A review on weather impact on aviation operations: Visibility, wind, precipitation, icing. *Journal of Airline Operations and Aviation Management*. 2(1): 1-44.
- Hoole P. R. P., Fisher J., Hoole S. R. H. (2022). Thunderstorms and Pre-lightning Electrostatics. *Lightning Engineering: Physics, Computer-based Test-bed, Protection of Ground and Airborne Systems*. 51-83.
- ICAO Safety Report. (2024). International Civil Aviation Organization. 29 p.
- Jayaram M. A., Fleyeh H. (2016). Convex hulls in image processing: a scoping review. *American Journal of Intelligent Systems*. 6(2): 48-58.
- Khattak A., Zhang J., Chan P. W., Chen F., Hussain A., Almujiab H. (2024). Wind shear and aircraft aborted landings: A deep learning perspective for prediction and analysis. *Atmosphere*. 15(5): 545.
- Kovalenko G. V., Muravev I. S., Kuts K. A. (2023). Methodology for training pilots to control a highly automated aircraft using cognitive-information converters of activity algorithms [Metodologiya postroeniya metodiki obucheniya pilotov po upravleniyu vysokoavtomatizirovannyim vozdushnym sudnom s ispol'zovaniem kognitivno-informacionnyh preobrazovatelej algoritmov deyatel'nosti]. *Proceedings of Higher Educational Institutions. Aeronautical engineering [Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika]*. 1: 35-41. (In Russian)
- Kovalenko G. V., Yadrov I. A. (2025). Application of Seq2seq models for predicting the development of thunderstorm activity to enhance pilot situational awareness in flight [Primenenie Seq2seq-modelej dlya prognozirovaniya razvitiya grozovoj deyatel'nosti s cel'yu povysheniya urovnya situacionnoj

osvedomlennosti pilota v polete]. *Scientific Bulletin of MSTU GA* [Nauchnyj vestnik MGTU GA]. 28(1): 20-38. (In Russian)

Kovalenko G. V., Yadrov I. A., Kuts K. A. (2023). Intelligent Adaptive Flight Crew Decision Support System for Thunderstorm Avoidance. *Russian Aeronautics*. 66(3): 552-559.

Lavezzi G., Guye K., Cichella V., Ciarcià M. (2023). Comparative analysis of nonlinear programming solvers: performance evaluation, Benchmarking, and Multi-UAV optimal path planning. *Drones*. 7(8): 487.

Li B., Chen B. (2021). An adaptive rapidly-exploring random tree. *IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica*. 9(2): 283-294.

Madkour A., Aref W. G., Rehman F. U., Rahman M. A., Basalamah S. (2017). A survey of shortest-path algorithms. *arXiv preprint arXiv:1705.02044*. 26 p.

Milani Z., Nichman L., Matida E., Fleury L., Wolde M., Bruning E., McFarquhar G. M., Kollias P. (2025). In-Flight Measurements of Lightning Locations Using an Aircraft-Mounted Lightning Mapper. *Aerospace Science and Technology*. 110038.

Muravyev I. S. (2022). Experimental test of the method for evaluating the functioning of automated systems on latest-generation aircraft [Eksperimental'naya proverka metoda ocenki funkcionirovaniya avtomatizirovannyh sistem na vozdukhnyh sudah poslednego pokoleniya]. *Crede Experto: transport, society, education, language* [Crede Experto: транспорт, общество, образование, язык]. 3: 20-33. (In Russian)

Nita I. A., Radu C., Cheval S. (2024). Aviation accidents related to atmospheric instability in the United States (2000–2020). *Theoretical and Applied Climatology*. 155(6): 5483–5497.

Park J. S., Oh S. J. (2012). A new concave hull algorithm and concaveness measure for n-dimensional datasets. *Journal of Information Science and Engineering*. 28(3): 587-600.

Rachmawati D., Gustin L. (2020). Analysis of Dijkstra's algorithm and A* algorithm in shortest path problem. *Journal of Physics: Conference Series, IOP Publishing*. 1566(1): 7.

Ravankar A. A., Ravankar A., Emaru T., Kobayashi Y. (2020). HPPRM: hybrid potential based probabilistic roadmap algorithm for improved dynamic path planning of mobile robots. *IEEE Access*. 8: 221743-221766.

Saalfeld A. (1999). Topologically consistent line simplification with the Douglas-Peucker algorithm. *Cartography and Geographic Information Science*. 26(1): 7-18.

Tan C. S., Mohd-Mokhtar R., Arshad M. R. (2021). A comprehensive review of coverage path planning in robotics using classical and heuristic algorithms. *IEEE Access*. 9: 119310-119342.

Xu J., Zheng Z., Feng Y., Qing X. (2010). A concave hull algorithm for scattered data and its applications. *3rd International Congress on Image and Signal Processing, IEEE*. 5: 2430-2433.

Yilmaz N. K. (2008). Path planning of autonomous underwater vehicles for adaptive sampling using mixed integer linear programming. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*. 33(4): 522-537.

Zhao C., Zheng D., Zhang Y., Liu X., Zhang Y., Yao W., Zhang W. (2021). Turbulence characteristics of thunderstorms before the first flash in comparison to non-thunderstorms. *Geophysical Research Letters*. 48(18): 10.