

УДК 621.396.96

DOI 10.51955/2312-1327\_2024\_3\_59

## АНАЛИЗ МЕТОДОЛОГИЧЕСКИХ ОСНОВ УПРАВЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИЕЙ ПОЛЕТА ВОЗДУШНОГО СУДНА

*Николай Павлович Малисов,  
orcid.org/0000-0002-9398-2028,  
Московский государственный технический университет  
гражданской авиации (Иркутский филиал),  
Коммунарков, 3  
Иркутск, 664047, Россия  
malisovnik@mail.ru*

**Аннотация.** При проектировании пилотажно-навигационных комплексов современных и перспективных воздушных судов (ВС) важным направлением является разработка новых подходов к построению и выдерживанию эффективных траекторий полета. Синтез системы траекторного управления, которая способна стабилизировать положение ВС и точно отслеживать заданный маршрут полета, является достаточно сложной задачей. В данной работе предлагается алгоритм формирования управления отслеживанием траектории, основанный на методах теории оптимального управления (ТОУ) с использованием подходов теории оптимальной фильтрации (ТОФ) для оценки параметров траекторного движения. Рассмотрена формулировка автономной задачи оптимального управления. В работе показатель качества выдерживания маршрута полета формулируется в виде минимизации отклонения фактической траектории полета от заданной.

Методами имитационного статистического моделирования подтверждена целесообразность внедрения предлагаемого подхода. Для проверки обоснованности предложенного подхода выполнялось имитационное моделирование типичного отслеживания траектории полета в ожидаемых условиях эксплуатации. Анализ полученных результатов в ходе имитационного моделирования показывает, что отклонение параметров управляемой траектории полета от заданных значений не превышает 5 м. Результаты демонстрируют эффективность алгоритма отслеживания заданного маршрута полета и устойчивость к внешним возмущениям.

**Ключевые слова:** воздушное судно, траектория полета, фильтр Калмана, оптимальное управление, оптимальная фильтрация, глобальная навигационная спутниковая система, система траекторного управления.

## ANALYSIS OF THE METHODOLOGICAL BASIS OF AIRCRAFT FLIGHT PATH CONTROL

*Nikolay P. Malisov,  
orcid.org/0000-0002-9398-2028,  
Moscow State Technical University  
of Civil Aviation (Irkutsk Branch),  
3, Kommunarov  
Irkutsk, 664047, Russia  
malisovnik@mail.ru*

**Abstract.** In the International Civil Aviation Organization, an important area is the development of new approaches to constructing and maintaining effective aircraft flight paths.

Developing a flight control system capable of not only stabilizing the position, but also accurately tracking the trajectory for an aircraft is a rather complex task. In this paper, an algorithm for generating trajectory tracking control is proposed based on the methods of optimal control theory (OCT) using optimal filtering theory (OFT) approaches to estimate the trajectory motion parameters. The formulation of an autonomous optimal control problem is considered. In the paper, the flight route maintenance quality indicator is formulated as minimizing the deviation of the actual flight path from the specified one. The expediency of implementing the proposed approach is confirmed by the methods of simulation statistical modeling. To test the validity of the proposed approach, a simulation modeling of a typical flight path tracking under expected operating conditions was performed. Analysis of the results obtained during the simulation modeling shows that the deviation of the controlled flight path parameters from the specified values does not exceed 5 m. The results demonstrate the efficiency of the algorithm for tracking a specified flight path and its stability to external disturbances.

**Keywords:** aircraft, flight path, Kalman filter, optimal control, optimal filtering, global navigation satellite system, trajectory control system.

## **Введение**

В Международной организации гражданской авиации важным направлением является разработка новых подходов к построению и выдерживанию эффективных траекторий полета ВС [Глобальный аэронавигационный план..., 2013].

В настоящее время произошел переход от интуитивного эвристического метода создания систем устройств к их систематическому созданию методами оптимального синтеза. На ЭВМ создается модель системы, исследуется, упрощается, затем воплощается в жизнь. Основное требование при реализации системы заключается в приближении к расчетным характеристикам. На сегодняшний день методы теории оптимального управления получают широкое распространение и развитие в различных областях науки и техники. Это связано с бурным развитием средств обработки информации, разработкой и внедрением радиотехнических систем, в которых используются новейшие достижения науки.

Некоторая свобода в выборе критерия оптимизации при использовании теории оптимального управления дает возможность разработчику наиболее полно учитывать влияющие факторы и условия функционирования системы [Харисов и др., 1996].

Основной задачей навигационного комплекса является наилучшая (в том или ином смысле) обработка поступающей статистической информации. Для синтеза подобных систем широко используются статистические ТОФ и ТОУ. Различным аспектам этих теорий посвящена обширная литература [Методы..., 2016; Сейдж и др., 1982; Степанов, 2010; Степанов, 2012; Теория автоматического управления..., 1986; Тихонов и др., 1991; Харисов и др., 1996; Ярлыков и др., 1993; Ярлыков, 1985].

В ТОУ кроме информационного процесса полагается заданным объект управления, на выходе которого необходимо сформировать управляемый процесс, наилучшим образом отслеживающий заданный информационный процесс. Таким образом, в ТОУ при синтезе накладываются дополнительные ограничения на синтезируемую систему, что сужает область выбора наилучшего

решения, а, следовательно, может привести лишь к ухудшению показателей качества по сравнению с ТОФ. Еще одна особенность в постановках задачи синтеза в ТОФ и ТОУ – это критерии выбора наилучшего решения. Различают два типа критериев: интегральный и локальный [Харисов и др., 1996].

Цель работы – анализ методологических основ синтеза алгоритмов функционирования системы траекторного управления навигационного комплекса для выдерживания заданной траектории полета воздушного судна.

### **Обзор литературы**

Основные проблемы, связанные с программированием четырехмерных маршрутов и траекторий полета решены в [Киселев и др., 2015; Maolaisha, 2015; Multiphase..., 2013; Rub'en, 2015; Toratani, 2016; Wickramasinghe et al., 2012]. В ожидаемых условиях эксплуатации на полет ВС по маршруту могут влиять различные факторы, которые затрудняют реализацию программных траекторий. В частности, боковой и встречный ветер, навигационные определения в условиях шумов и помех, наличие запретных зон, сегрегированное воздушное пространство и т. д. [Алгоритмы управления траекториями..., 2021; Ерохин, 2019; Ерохин и др., 2023]. В работах [Киселев и др., 2015; Maolaisha, 2015; Multiphase..., 2013; Rub'en, 2015; Wickramasinghe et al., 2012] предложены алгоритмы функционирования системы траекторного управления в детерминированной постановке с учетом параметров ветра. В [Киселев и др., 2015; Maolaisha, 2015] предложено алгоритмическое обеспечение для построения траекторий с целью минимизации расхода топлива в зависимости от направления ветра. В [Wickramasinghe et al., 2012] рассмотрены методы оптимального управления траекторией полета с учетом аэродинамической конфигурации, атмосферы, ветра и соответствующих ограничений, которые возникают при облете запретных секторов, а также процедур вылета и захода на посадку. В [Rub'en, 2015] рассмотрен процесс принятия решения при определении оптимальной последовательности промежуточных точек маршрута, а также интервалов времени, в которое возможно переполнение трафика навигационных опорных точек (НОТ). В [Multiphase..., 2013] предложен метод оптимизации траектории в воздушном пространстве аэропорта, реализация которого возможна в реальном времени. Отличительной особенностью результатов, представленных в работах [Киселев и др., 2015; Maolaisha, 2015; Rub'en, 2015; Multiphase..., 2013; Wickramasinghe et al., 2012], является детерминированный подход к синтезу алгоритмов, т.е. при условии знания истинных значений фазовых координат. В работах [Заюд Фади и др., 2009; Меркулов и др., 2018; Методы..., 2016] предложены алгоритмы управления на основе оценки параметров траекторного движения в комплексных системах навигации. В [Воронов и др., 2011; Формирование..., 2014] изложены результаты разработки и исследования характеристик алгоритма управления траекторией и многокритериальной оптимизацией ее параметров.

При этом актуальной научно-исследовательской задачей остается анализ методологических основ оптимального управления траекторией полета ВС в стохастической постановке.

В данной работе предлагается алгоритм проектирования управления отслеживанием траектории, основанный на методах ТОУ с использованием подходов ТОФ для оценки параметров траекторного движения.

### Модель траекторного движения воздушного судна

При разработке и исследовании алгоритмов управления траекторией большое значение имеет модель полета ВС. В работе использовалась модель с вектором состояния вида [Киселев и др., 2015]:

$$\mathbf{X} = |x, y, z, V, \psi, m|^T, \quad (1)$$

где  $x, y, z$  – координаты ВС в системе координат  $OXYZ$ ;  $V$  – истинная воздушная скорость;  $\psi$  – курс ВС;  $m$  – масса.

В общем случае каждый этап и режим полёта ВС может характеризоваться различной совокупностью параметров и описываться различной системой уравнений. Динамика (1) описывается системой дифференциальных уравнений [Киселев и др., 2015]:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} \equiv \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{V} \\ \dot{\psi} \\ \dot{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V \cos \psi \cos \vartheta + w_x \\ V \sin \psi \cos \vartheta + w_y \\ V \sin \vartheta + w_z \\ (T - d) / m - g_0 \sin \vartheta \\ L \sin \varphi / (mV) \\ -\eta T \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\vartheta$  – угол наклона траектории ВС;  $g_0$  – ускорение свободного падения;  $\varphi$  – угол крена;  $\eta$  – удельный расход топлива по тяге;  $T$  – сила тяги двигателя;  $d$  – сила лобового сопротивления;  $L$  – аэродинамическая подъемная сила;  $\mathbf{w} = |w_x, w_y, w_z|$  – вектор скорости ветра.

Методика и формулы расчета значений  $\eta$ ,  $L$  и  $d$  приведены в [Nuic, 2014]. Параметры модели полета ВС проиллюстрированы на рис. 1.

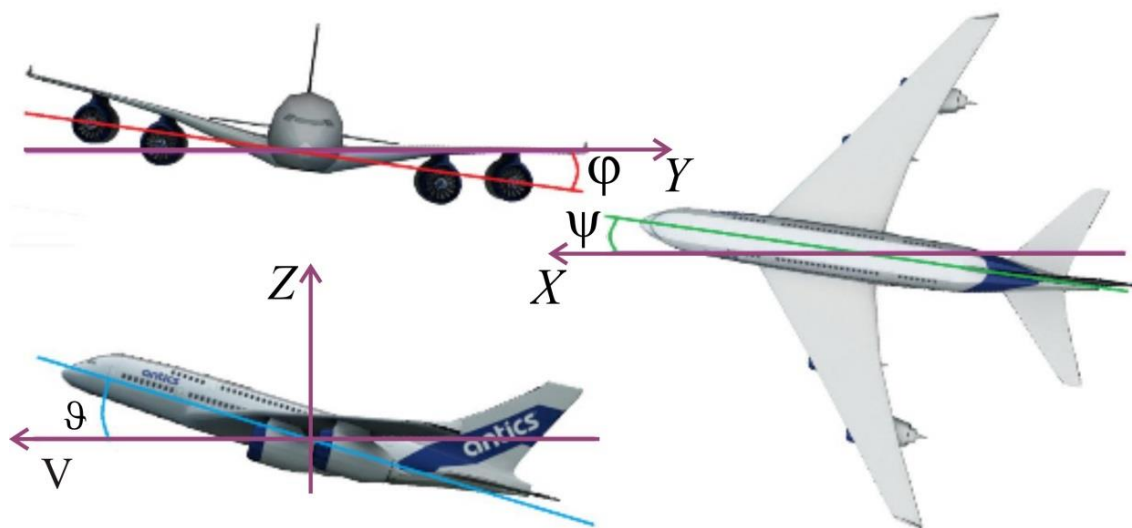


Рисунок 1 – Параметры траекторного движения

С помощью вектора состояния (1) в пространстве состояний задаются положение ВС, характер его движения, характер функционирования его систем и т. д.

### Постановка задачи

Пусть имеется вектор состояния  $\bar{\lambda}_u$ , характеризующий информационный процесс. В терминах ТОУ  $\bar{\lambda}_u$  – заданная траектория [Харисов и др., 1996], динамику переменных вектора  $\bar{\lambda}_u$  представим в виде разностного уравнения:

$$\bar{\lambda}_{u,v} = \Phi_{u,v} \bar{\lambda}_{u,v-1} + G_{u,v} \bar{w}_{u,v-1}, \quad (3)$$

где  $v = \overline{0, N-1}$  – временной индекс;  $N$  – число отсчетов,  $\Phi_{u,v}, G_{u,v}$  – матрицы размерности  $n \times n$  и  $n \times l$ ;  $\bar{w}_{u,v}$  –  $l$ -мерный вектор дискретных белых гауссовских шумов (ДБГШ) с известными вероятностными характеристиками.

Управляемая траектория отображается вектором  $\bar{\lambda}_{y,v}$ , динамику которого представим в виде:

$$\bar{\lambda}_{y,v} = \Phi_{y,v} \bar{\lambda}_{y,v-1} + B_y \bar{u}_{v-1} + G_{y,v} \bar{w}_{y,v-1}, \quad (4)$$

где  $\bar{u}_{v-1}$  –  $p$ -мерный вектор управляющих сигналов;  $\mathbf{u}_v \in \mathbf{U}$  – множество допустимых значений управлений;  $\bar{w}_{y,v-1}$  –  $q$ -мерный вектор ДБГШ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей  $\Psi_y$ .

В соответствии с подходами ТОФ и ТОУ вектор наблюдений  $\bar{\xi}_v$  представим в виде:

$$\bar{\xi}_v = \mathbf{H}_v \bar{\lambda}_v + \bar{\mathbf{n}}_v, \quad (5)$$

где  $\bar{\xi}_v = [\bar{\xi}_{1,v} \dots \bar{\xi}_{m,v}]^T$  –  $m$  – количество НОТ;  $\bar{\mathbf{n}}_v$  –  $m$ -мерный вектор ДБГШ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей  $\mathbf{V}$ ; полагаем, что шумы  $\bar{\mathbf{w}}_{u,v}$  и  $\bar{\mathbf{n}}_v$  независимы;  $\mathbf{H}_{u,v}$  – матрица наблюдений размерности  $m \times n$ :

$$\mathbf{H}_v = \begin{bmatrix} -\cos(\alpha_1) & -\cos(\beta_1) & -\cos(\gamma_1) & 1 \\ -\cos(\alpha_2) & -\cos(\beta_2) & -\cos(\gamma_2) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\cos(\alpha_N) & -\cos(\beta_N) & -\cos(\gamma_N) & 1 \end{bmatrix},$$

где  $\cos(\alpha_i) = \frac{x_{i,v} - x_v}{D_{i,v}}$ ,  $\cos(\beta_i) = \frac{y_{i,v} - y_v}{D_{i,v}}$ ,  $\cos(\gamma_i) = \frac{z_{i,v} - z_v}{D_{i,v}}$  – направляющие косинусы линии визирования ВС –  $i$ -й НОТ,  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  – координаты  $i$ -ой НОТ;  $D_{i,v}$  – значение дальности.

В [Харисов и др., 1996] показано, что управляемая траектория в  $v$ -ый момент времени равна оптимальной экстраполированной оценке требуемой траектории  $\mathbf{x}_{y,v} = \tilde{\mathbf{x}}_{T,v}$ . Эта экстраполированная оценка формируется по наблюдениям  $\bar{\xi}_1^{v-1}$ , полученным до момента времени  $v$ .

Частные задачи оптимальной фильтрации и оптимального управления возникают чаще всего в результате искусственного разделения общей задачи оптимального управления, согласно утверждению теоремы разделения. Автономная задача оптимального управления формулируется следующим образом:

1. С учетом теоремы разделения структурная схема оптимальной системы совместного оценивания и управления делится на две части, как показано на рис. 2.

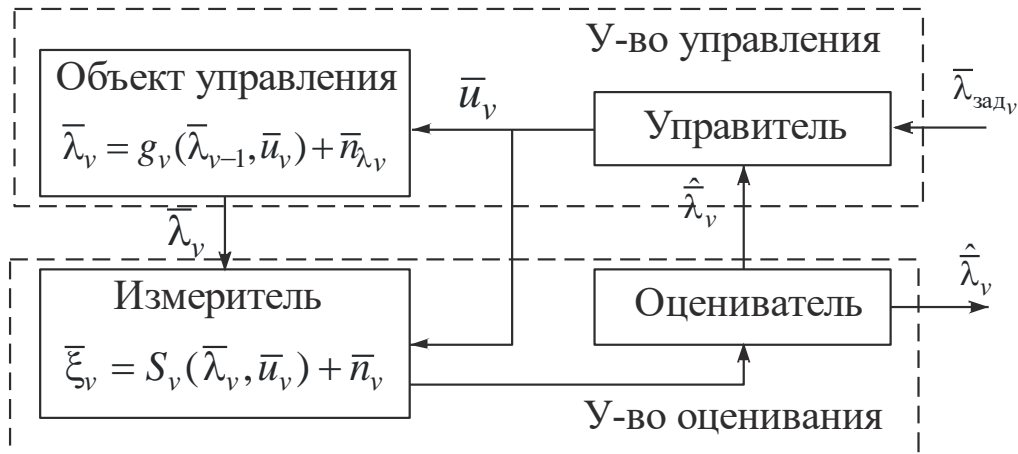


Рисунок 2 – Структурная схема оптимального оценивания и управления с учетом теоремы разделения

2. Считается, что управления  $\bar{\mathbf{u}}_v, v = \overline{1, N}$ , входящие в уравнения динамики и наблюдения, заданы (их определяет устройство управления). В этом случае можно записать

$$\bar{\xi}_v = s_v(\bar{\lambda}_v, \bar{\mathbf{u}}_v) + \bar{\mathbf{n}}_{\xi v}, \quad \bar{\lambda}_v = \mathbf{g}_v(\bar{\lambda}_{v-1}, \bar{\mathbf{u}}_v) + \bar{\mathbf{n}}_{\lambda v}.$$

3. Вводится оценка  $\hat{\lambda}_v$  и задается критерий оценивания, основанный на функции потерь  $c_v(\bar{\lambda}_v, \hat{\lambda}_v)$ , в задачах оптимальной фильтрации обычно используют только локальный критерий.

$$\hat{\lambda}_v = \min_{\bar{\mathbf{u}}_v \in U}^{-1} M[c_v(\bar{\lambda}_v, \bar{\mathbf{u}}_v)], \quad (6)$$

где  $M\{c_v(\bar{\lambda}_v, \bar{\mathbf{u}}_v)\} = \int \int_{\bar{\lambda} \xi} c_v(\bar{\lambda}_v, \bar{\mathbf{u}}_v) p(\bar{\lambda}_v, \bar{\xi}_1^v) d\bar{\lambda}_v d\bar{\xi}_1^v$ .

4. Считается, что известно не  $\bar{\xi}_v$  (уравнение наблюдения отсутствует), а  $\bar{\lambda}_v$ , или часть компонент  $\bar{\lambda}_v$ . В действительности вместо них используется оценка, полученная в результате решения автономной задачи фильтрации.

### Алгоритм управления траекторий

Для отслеживания заданного маршрута полета ВС по программной траектории необходимо управлять его положением [Меркулов и др., 2018]. В нашем случае программной траекторией полета ВС является вектор заданных координат  $\mathbf{x}_3$ , управляемой траекторией является фактическая линия пути, как показано на рисунке 3. Отклонение управляемой траектории от заданной обозначим в виде  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{x}_{3,v} - \mathbf{x}_{y,v}$  (рис. 3).

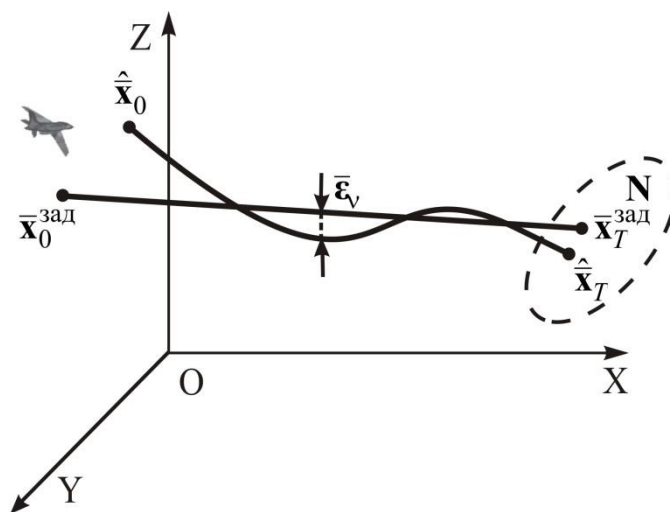


Рисунок 3 – Заданная и управляемая траектории полета ВС

В соответствии с (2) вектор состояния, включающий переменные заданной траектории, имеет вид  $\mathbf{x}_3 = [x_3, y_3, z_3, V_3, \psi_3, m_3]^T$ , уравнение динамики представим выражением:

$$\mathbf{x}_{3,v+1} = \Phi_{3,v/v+1} \mathbf{x}_{3,v}, \quad (7)$$

где  $\Phi_{3,v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta t \cos \psi \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \sin \psi \cos \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \Delta t \sin \vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ;  $\Delta t$  – дискретность счета.

Вектор управляемых фазовых координат имеет вид  $\mathbf{x}_y = [x_y, y_y, z_y, V_y, \psi_y]^T$ . В работах [Ерохин, 2019; Степанов, 2010; Степанов, 2012] обоснован вектор измеряемых параметров применительно к многопозиционным радиотехническим системам

$$\mathbf{x}_u = [x_y, V_x, y_y, V_y, z_y, V_z, \Delta \tau, V_{\Delta \tau}]^T, \quad (8)$$

включающий некоторые переменные вектора  $\mathbf{x}_y$ , составляющие вектора скорости  $V_x, V_y, V_z$ , а также параметры бортового эталона времени и частоты  $\Delta \tau$  и  $V_{\Delta \tau}$ .

Для выдерживания заданного маршрута полета требуется формирование управляющих сигналов  $\mathbf{u}_v$  отслеживания заданной траектории полета  $\mathbf{x}_{3,v}$  наилучшим образом. В работе показатель качества выдерживания маршрута полета представлен в виде минимизации отклонения управляемой траектории относительно заданной [Ерохин, 2019; Ерохин, 2018; Меркулов и др., 2018; Харисов и др., 1996]:

$$\begin{aligned} J &= \min_{\mathbf{u}_1^{N-1} \in \mathbf{U}} M \left[ \sum_{v=1}^N \{ (\mathbf{x}_{3,v} - \mathbf{x}_{y,v})^T \mathbf{Q}_v (\mathbf{x}_{3,v} - \mathbf{x}_{y,v}) + \mathbf{u}_v^T \mathbf{E}_v \mathbf{u}_v \} \right] = \\ &= \min_{\mathbf{u}_1^{N-1} \in \mathbf{U}} M \left[ \sum_{v=1}^N c_v (\mathbf{x}_{3,v}, \mathbf{x}_{y,v}, \mathbf{u}_v) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\mathbf{Q}_v$  – положительно определенная матрица штрафов;  $\mathbf{E}_v$  – положительно определенная матрица, задающая вес мощности управляющих сигналов в общем показателе качества;  $c_v (\mathbf{x}_{3,v}, \mathbf{x}_{y,v}, \mathbf{u}_v)$  – обобщенная функция потерь.

При синтезе алгоритмов локально-оптимального управления используют критерий оптимальности:

$$J_v = M\{c_v(\mathbf{x}_{3,v}, \mathbf{x}_{Y,v}, \mathbf{u}_v)\}. \quad (10)$$

Данный критерий называется текущим (локальным), так как требуется обеспечить экстремум показателя качества в каждый текущий момент времени.

Динамика управляемой траектории представлена уравнением:

$$\mathbf{x}_{Y,v+1} = g(\mathbf{x}_{Y,v}, \mathbf{u}_v) + \mathbf{G}_{v/v+1} \mathbf{n}_{Y,v} = \mathbf{\Phi}_{Y,v/v+1} \mathbf{x}_{Y,v} + \mathbf{B}_{v/v+1} \mathbf{u}_v + \mathbf{G}_{v/v+1} \mathbf{n}_{Y,v},$$

где  $g_v(\mathbf{x}_{Y,v}, \mathbf{u}_v)$  –  $n$ -мерная функция векторов  $\mathbf{x}_{Y,v}$  и  $\mathbf{u}_v$ ;  $\mathbf{G}_{v/v+1}$  – матрица ограничений на шумы системы;  $\mathbf{B}_v$  – вектор коэффициентов управляющих воздействий системы;  $\mathbf{n}_{Y,v}$  – вектор ДБГШ с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционной матрицей  $\mathbf{\Psi}_v$ .

В работах [Меркулов и др., 2018; Харисов и др., 1996] предложен подход, основанный на введении вектора состояния  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_Y)^T$  и соответствующего уравнения динамики

$$\mathbf{x}_{v+1} = \mathbf{\Phi}_{v/v+1} \mathbf{x}_v + \mathbf{B}_v \mathbf{u}_v + \mathbf{G}_{v/v+1} \mathbf{n}_{x,v}, \quad (11)$$

где входящие в уравнение матрицы и вектора представим в виде:

$$\mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} \mathbf{\Phi}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi}_Y \end{vmatrix}, \mathbf{G} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{G}_Y \end{vmatrix}, \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{B}_Y \end{vmatrix}, \mathbf{n} = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{n}_Y \end{vmatrix}.$$

В сформулированной в статье постановке задачи требуется сформировать вектор управления  $\mathbf{u}_v = \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})$ , оптимальный по критерию [Дегтярев и др., 1991; Меркулов и др., 2018]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_v = \arg \min_{\mathbf{u}_v \in \mathbf{U}} J_v &= \arg \min_{\mathbf{u}_v \in \mathbf{U}} \left\{ \int_{\mathbf{x}} c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})) p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) d\mathbf{x}_v \right\} = \\ &= \arg \min_{\mathbf{u}_v \in \mathbf{U}} M \left\{ c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v) \Big|_{\xi_1^{v-1}} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

где  $J_v = \min_{\mathbf{U}_1^{v-1}} M\{c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v)\}$ .

Представим показатель качества в виде

$$J_v = M\{c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v)\} = \iint_{\mathbf{x} \xi} c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})) p(\mathbf{x}_v, \xi_1^{v-1}) d\mathbf{x}_v d\xi_1^{v-1}. \quad (13)$$

Входящую в (13) совместную плотность вероятности (ПВ)  $p(\mathbf{x}_v, \xi_1^{v-1})$  представим в виде произведения

$$p(\mathbf{x}_v, \xi_1^{v-1}) = p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) p(\xi_1^{v-1}),$$

которое является исходным выражением для получения алгоритма обработки информации.

В этом случае

$$J_v = \int \left[ \int_{\xi} c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})) p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) d\mathbf{x}_v \right] p(\xi_1^{v-1}) d\xi_1^{v-1}. \quad (14)$$

Для определения ПВ воспользуемся соотношениями оптимальной фильтрации Р. Л. Стратоновича [Стратонович, 1966]

$$\begin{cases} p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) = \tilde{p}_v(\mathbf{x}_v) = \int_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}_v | \mathbf{x}_{v-1}, \mathbf{u}_v) p(\mathbf{x}_{v-1} | \xi_1^{v-1}) d\mathbf{x}_{v-1}, \\ p_v(\mathbf{x}_v) = c_v p(\xi_v | \mathbf{x}_v) \tilde{p}_v(\mathbf{x}_v). \end{cases} \quad (15)$$

В соответствии с выражениями (5), (11) условная ПВ является нормальной:  $p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) = N\{\tilde{\mathbf{x}}_v, \tilde{\mathbf{P}}_v\}$ . Исходя из этого, параметрами нормального закона являются математическое ожидание вектора и матрица дисперсий, которые находятся с помощью дискретного фильтра Калмана [Алешечкин и др., 2016; Меркулов и др., 2018; Харисов и др., 1996]:

$$\hat{\mathbf{x}}_v = \tilde{\mathbf{x}}_v + \mathbf{K}_v [\xi_v - \mathbf{H}_v \tilde{\mathbf{x}}_v], \quad (16)$$

где  $\hat{\mathbf{x}}_v$  – апостериорная оценка вектора состояния  $\mathbf{x}_v$ ;  $\tilde{\mathbf{x}}_v = \Phi_{v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{v-1} + \mathbf{B}_v \mathbf{u}_v$ , – априорная оценка вектора состояния  $\mathbf{x}_v$ ,  $\mathbf{K}_v$  – матричный коэффициент усиления фильтра Калмана

$$\mathbf{K}_v = \mathbf{P}_v \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1}, \quad (17)$$

в котором ковариационная матрица ошибок фильтрации  $\mathbf{P}_{v-1}$  определяется по формуле

$$\mathbf{P}_v^{-1} = \tilde{\mathbf{P}}_v^{-1} + \mathbf{H}_v^T \mathbf{V}_v^{-1} \mathbf{H}_v, \quad (18)$$

где  $\tilde{\mathbf{P}}_v$  – экстраполированная ковариационная матрица ошибок фильтрации

$$\tilde{\mathbf{P}}_v = \Phi_{v/v-1} \mathbf{P}_{v-1} \Phi_{v/v-1}^T + \mathbf{G}_{v/v-1} \mathbf{Q}_v \mathbf{G}_{v/v-1}^T. \quad (19)$$

Тогда в соответствии с (14) – (19) получаем:

$$\begin{aligned} J_v &= M \left\{ c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v) \Big|_{\xi_1^{v-1}} \right\} = \int_{\mathbf{x}} c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})) p(\mathbf{x}_v | \xi_1^{v-1}) d\mathbf{x}_v = \\ &= \int_{\mathbf{x}} c_v(\mathbf{x}_v, \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})) N(\tilde{\mathbf{x}}_v | \tilde{\mathbf{P}}_v) d\mathbf{x}_{y,v} = \tilde{\mathbf{x}}_v^T \mathbf{Q}_v \tilde{\mathbf{x}}_v + tr\{\tilde{\mathbf{Q}}_v \tilde{\mathbf{P}}_v\} + \mathbf{u}_v^T \mathbf{E}_v \mathbf{u}_v = \\ &= (\Phi_{v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{v-1} + \mathbf{B}_v \mathbf{u}_v)^T \tilde{\mathbf{Q}}_v (\Phi_{v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{v-1} + \mathbf{B}_v \mathbf{u}_v) + tr\{\tilde{\mathbf{Q}}_v \tilde{\mathbf{P}}_v\} + \mathbf{u}_v^T \mathbf{E}_v \mathbf{u}_v, \end{aligned}$$

где  $tr$  – след матрицы.

В [Меркулов и др., 2018; Сейдж и др., 1982; Харисов и др., 1996] показано, что  $tr\{\tilde{\mathbf{Q}}_v \tilde{\mathbf{P}}_v\} = const(\mathbf{u}_v)$  не зависит от управления, тогда оптимальное управление определяется путем решения уравнения:

$$\frac{\partial J_v}{\partial \mathbf{u}_v} = 2\mathbf{B}_v^T \tilde{\mathbf{Q}}_v (\Phi_{v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{v-1} + \mathbf{B}_v \mathbf{u}_v) + 2\mathbf{E}_v \mathbf{u}_v = 0 \quad (20)$$

и записывается следующим образом:

$$\mathbf{u}_v = (\mathbf{B}_v^T \tilde{\mathbf{Q}}_v \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v)^{-1} \mathbf{B}_v^T \tilde{\mathbf{Q}}_v [\Phi_{3,v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{3,v-1} - \Phi_{y,v/v-1} \hat{\mathbf{x}}_{y,v-1}] = \mathbf{L}_v [\hat{\mathbf{x}}_{3,v-1} - \hat{\mathbf{x}}_{y,v-1}], \quad (21)$$

где  $\mathbf{L}_v = (\mathbf{B}_v^T \tilde{\mathbf{Q}}_v \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v)^{-1} \mathbf{B}_v^T \tilde{\mathbf{Q}}_v \Phi_{v/v-1}$  – матричный коэффициент.

В подобных системах траекторного управления  $\mathbf{x}_3$  известная величина, поэтому схема её оценки отсутствует, реализуется система расчета воздействий для формирования управляемой траектории  $\hat{\mathbf{x}}_y$  с целью эффективного отслеживания заданного маршрута. Выражение (21) запишем в виде

$$\mathbf{u}_v = -(\mathbf{B}_v^T \mathbf{Q}_v \mathbf{B}_v + \mathbf{E}_v)^{-1} \mathbf{B}_v^T \mathbf{Q}_v \Phi_{v/v-1} \hat{\mathbf{e}}_{v-1} = -\mathbf{L}_v (\mathbf{x}_{3,v-1} - \hat{\mathbf{x}}_{y,v-1}), \quad (22)$$

где  $\mathbf{x}_3$  – известная функция времени, а оценка  $\hat{\mathbf{x}}_y$  формируется на выходе фильтра Калмана (16) – (19).

Соотношения (21) – (22) будут также справедливы и при наличии шумов в уравнении динамики для управляемой траектории. Только вместо детерминированной траектории  $\mathbf{x}$  необходимо использовать её Калмановскую оценку при фиксированном управлении, получаемом из уравнения (21).

На основе моделей вектора состояния и наблюдения в навигационном комплексе формируется оценка вектора состояния  $\hat{\mathbf{x}}_y$ . На основании сформированных оценок фазовых координат  $\hat{\mathbf{x}}_y$  и требуемых (заданных) фазовых координат  $\mathbf{x}_3$  в системе траекторного управления формируются

сигналы управления  $\mathbf{u}_v = \mathbf{u}_v(\xi_1^{v-1})$ . Использование сигналов управления обеспечивает пилотирование ВС, управление измерителями и элементами навигационного комплекса, условиями измерения информационных параметров сигналов при выполнении поставленной задачи.

### Результаты моделирования

Для проверки обоснованности и эффективности алгоритма управления, предложенного в данной статье, выполнялось имитационное моделирование типичного отслеживания траектории полета при определенных условиях с использованием данных, взятых из [Ерохин, 2018].

На рисунке 4 представлены графики среднеквадратического отклонения оценки (СКО)  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  ошибки оценки координат ВС.

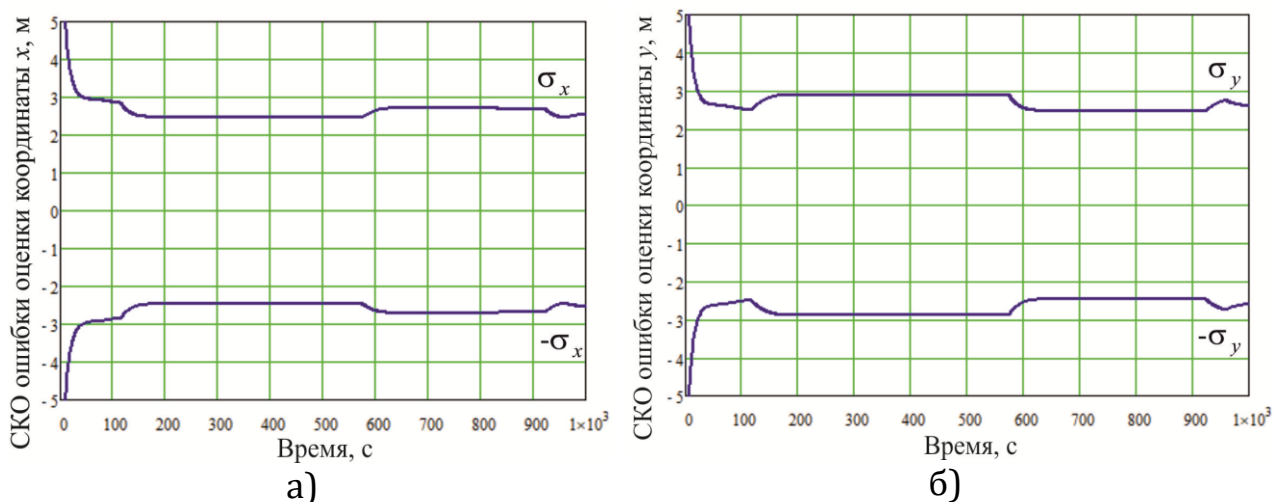


Рисунок 4 – СКО ошибки оценки координат ВС  $x$  (а) и  $y$  (б) при маршрутном полете по заданной траектории

Анализ полученных результатов демонстрирует высокую точность фильтрации координат ВС ( $\sigma \approx 3$  м) на основе ГНСС измерений.

На рисунке 5 представлены реализации отклонения текущих координат ВС  $\varepsilon_x = x - \hat{x}$  и  $\varepsilon_y = y - \hat{y}$  от заданных значений.

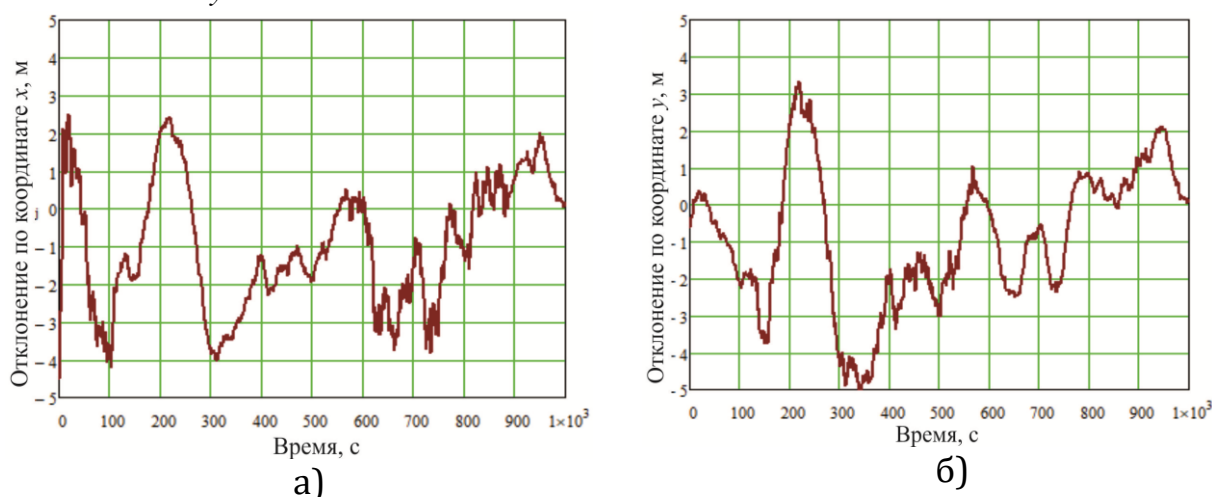


Рисунок 5 – Отклонение текущих координат ВС  $x$  (а) и  $y$  (б) от заданных

Анализ полученных результатов показывает, что для моделируемой ситуации отклонение параметров управляемой траектории полета от заданных значений не превышает 5 м. Результаты демонстрируют эффективность алгоритма отслеживания заданного маршрута полета и устойчивость к внешним возмущениям.

### **Заключение**

На современном этапе развития методологических основ систем траекторного управления методы теории оптимального управления получают широкое распространение в различных областях и конкретных приложениях. В статье представлены результаты анализа методологических основ управления траекторией полета воздушного судна, которые базируются на методах теории оптимальной фильтрации и теории оптимального управления. Рассмотрены вопросы синтеза и исследования локально-оптимального алгоритма управления траекторией полета при оценке параметров на основе фильтра Калмана при наличии внешних возмущений. Для проверки обоснованности и эффективности методологических основ траекторного управления выполнялось имитационное моделирование типичного отслеживания траектории полета в ожидаемых условиях эксплуатации при наличии внешних возмущений. Анализ полученных результатов показывает, что для моделируемой ситуации отклонение параметров управляемой траектории полета от заданных значений не превышает 5 м. Результаты демонстрируют эффективность алгоритма отслеживания заданного маршрута полета и устойчивость к внешним возмущениям.

Дальнейшие исследования должны быть направлены на изучение способов повышения точности отслеживания заданной траектории полета воздушного судна в условиях воздействия помех, а также рассмотрение возможности применения предлагаемого подхода к оптимизации траектории полета беспилотного летательного аппарата.

### **Библиографический список**

Алгоритмы управления траекториями беспилотных авиационных комплексов при полете в составе группы / А. К. Ермаков, Т. Ю. Портнова, Б. В. Лежанкин, В. В. Ерохин // Волновая электроника и инфокоммуникационные системы: Материалы XXIV Международной научной конференции. В 3-х частях, Санкт-Петербург, 31 мая – 04 2021 года. Том Часть 2. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2021. С. 62-69. EDN YIEIWM.

*Алешечкин А. М.* Оптимизация траекторий динамических управляемых объектов в интегрированной системе навигации на основе инерциальных и спутниковых технологий / А. М. Алешечкин, В. В. Ерохин // Гироскопия и навигация. 2016. Т. 24, № 2(93). С. 3-19. DOI 10.17285/0869-7035.2016.24.2.003-019. EDN WFBWNL.

*Воронов Е. М.* 77-30569/280873 Обеспечение траекторной безопасности в задаче облета динамической круговой зоны / Е. М. Воронов, А. А. Карпунин // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2011. № 12. С. 5. EDN OZGRX.

Глобальный аэронавигационный план на 2013-2028 гг. Международная организация гражданской авиации. Doc 9750-AN/963. 4-е изд. 2013. 147 с.

*Дегтярев Г. Л.* Синтез локально-оптимальных алгоритмов управления летательными аппаратами / Г. Л. Дегтярев, И. С. Ризаев. М.: Машиностроение, 1991. 304 с.

*Ерохин В. В.* Оптимизация навигационного обеспечения воздушных судов при свободной маршрутизации полетов: специальность 05.22.13 «Навигация и управление воздушным движением»: диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук / Ерохин Вячеслав Владимирович, 2019. 287 с. EDN BZSGAB.

*Ерохин В. В.* Оценка параметров траекторного движения БПЛА при различной конфигурации источников навигационной информации / В. В. Ерохин, Б. В. Лежанкин, Э. А. Болелов // Успехи современной радиоэлектроники. 2023. Т. 77, № 6. С. 35-49. DOI 10.18127/j20700784-202306-04. EDN MVHGGW.

*Ерохин В. В.* Управление траекторией летательного аппарата при полете по заданному маршруту на основе глобальной навигационной спутниковой системы // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 3. С. 49-56. EDN YCKLYT.

*Заюд Фади.* Исследование методов фильтрации в задаче определения координат летательного аппарата в пространстве / Заюд Фади, В. В. Поляков, В. В. Воробьев // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2009. № 138. С. 120-125. EDN LDESIF.

*Киселев В. Ю.* Предсказание траектории воздушного судна в автоматизированных системах управления воздушным движением / В. Ю. Киселев, А. А. Монаков // Информационно-управляющие системы. 2015. № 4(77). С. 33-40. EDN UHRIST.

*Меркулов В. И.* Автоматическое сопровождение целей в РЛС интегрированных авиационных комплексов: в 3 т. Т. 1. Теоретические основы. РЛС в составе интегрированного авиационного комплекса / В. И. Меркулов, В. С. Верба, А. Р. Ильчук; под ред. В. С. Вербы. М.: Радиотехника, 2018. 357 с.

Методы траекторного управления наблюдением в интегрированных многодатчиковых двухпозиционных системах радиомониторинга воздушного базирования / В. И. Меркулов, Д. А. Миляков, О. Е. Радоминов, В. С. Чернов // Журнал радиоэлектроники. 2016. № 4. С. 7. EDN WNAFGD.

*Сейдж Э. П.* Оптимальное управление системами: пер. с англ. / Э. П. Сейдж, Ч. С. Уайт; под ред. Б.Р. Левина. М.: Радио и связь, 1982. 392 с.

*Степанов О. А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 1: Введение в теорию оценивания. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2010. 496 с.

*Степанов О. А.* Основы теории оценивания с приложениями к задачам обработки навигационной информации. Ч. 2: Введение в теорию фильтрации. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2012. 517 с.

*Стратонович Р. Л.* Условные марковские процессы и их применение к теории оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1966. 319 с.

Теория автоматического управления: в 2 ч. Ч. 2. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин и др.; под ред. А. А. Воронова. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986. 504 с.

*Тихонов В. И.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В. И. Тихонов, В. Н. Харисов. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.

Формирование структуры траекторного управления летательного аппарата и многокритериальной оптимизации ее параметров / Е. М. Воронов, А. Л. Репкин, А. М. Савчук, С. И. Сычев // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. 2014. № 5(98). С. 16-39. EDN SVZLQX.

*Харисов В. Н.* Некоторые вопросы использования теорий оптимальной фильтрации и оптимального управления для синтеза информационных систем / В. Н. Харисов, А. И. Перов // Радиотехника. 1996. №7. С. 7-12.

*Ярлыков М. С.* Марковская теория оценивания случайных процессов / М. С. Ярлыков, М. А. Миронов. М.: Радио и связь, 1993. 464 с.

*Ярлыков М. С.* Статистическая теория радионавигации. М.: Радио и связь, 1985. 344 с.

*Maolaisha A.* Free-Flight Trajectory Optimization by Mixed Integer Programming. A thesis submitted to fulfillment of the requirements for the degree of master in science. *Angewandte Mathematik und Optimierung Schriftenreihe (AMOS) # 24*, University of Hamburg, 2015, 74 p.

Multiphase Mixed-Integer Optimal Control Approach to Aircraft Trajectory Optimization / M. Soler, A. Olivares, E. Staffetti, P. Bonami // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. № 36(5). pp. 1267-1277. DOI 10.2514/1.60492.

*Nuic A.* User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA). Revision 3.12 // EUROCONTROL Experimental Centre. 2014. 106 p.

*Rub'en A. G.* Commercial aircraft trajectory optimization using optimal control. Bachelor Thesis, Universidad Carlos III de Madrid, 2015. 64 p.

*Toratani D.* Study on Simultaneous Optimization Method for Trajectory and Sequence of Air Traffic Management. Doctoral Thesis. Yokohama National University, 2016. p. 101

*Wickramasinghe N. K.* Flight trajectory optimization for an efficient air transportation system / N. K. Wickramasinghe, A. Harada, Y. Miyazawa // *Proceedings of the 28th International Congress of the Aeronautical Sciences*. 2012. Pp. 1-12.

## References

*Aleshechkin A. M.* (2016). Optimization of trajectories of dynamic controlled objects in an integrated navigation system based on inertial and satellite technologies. *Giroskopiya i navigaciya*. 24. 2(93): 3-19. DOI: 10.17285/0869-7035.2016.24.2.003-019. (In Russian)

*Degtyarev G. L., Rizaev I. S.* (1991). Synthesis of locally optimal control algorithms for aircraft. Moscow: *Mashinostroenie*. 1991. p. 304. (In Russian)

*Ermakov A. K., Portnova T. Yu., Lezhankin B. V., Erokhin V. V.* (2021). Algorithms for controlling the trajectories of unmanned aircraft systems when flying as part of a group. *Volnovaya elektronika i infokommunikacionnye sistemy: Materialy XXIV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii. V 3-h chastyah, Sankt-Peterburg, 31 maya – 04 2021 goda. Tom Chast' 2. – Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj universitet aerokosmicheskogo priborostroeniya*. 62-69. EDN YIEIWM. (In Russian)

*Erokhin V. V.* (2018). Control of the trajectory of an aircraft during a flight along a given route based on the global navigation satellite system. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaya tekhnika*. 3: 49-56. (In Russian)

*Erokhin V. V.* (2019). Optimization of navigation support for aircraft with free flight routing: Special'nost' 05.22.13 «Navigaciya i upravlenie vozdushnym dvizheniem»: dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni doktora tekhnicheskikh nauk. 2019. 287 p. EDN BZSGAB. (In Russian)

*Erokhin V. V., Lezhankin B. V., Bolelov E. A.* (2023). Estimation of UAV trajectory parameters with different configurations of navigation information sources. *Uspekhi sovremennoj radioelektroniki*. 77(6): 35-49. DOI: 10.18127/j20700784-202306-04. EDN MVHGGW. (In Russian)

Global'nyj aeronavigacionnyj plan na 2013-2028 gg. (2013). *International Civil Aviation Organization. Doc 9750-AN/963*. p. 147. (In Russian)

*Kharisov V. N., Perov A. I.* (1996). Some issues of using theories of optimal filtering and optimal control for the synthesis of information systems. *Radiotekhnika*. 7: 7-12. (In Russian)

*Maolaisha A.* (2015). Free-Flight Trajectory Optimization by Mixed Integer Programming. A thesis submitted to fulfillment of the requirements for the degree of master in science. *Angewandte Mathematik und Optimierung Schriftenreihe (AMOS) # 24*, University of Hamburg. p. 74

*Merkulov V. I., Milyakov D. A., Radominov O. E., Chernov V. S.* (2016). Methods of trajectory control of observation in integrated multi-sensor two-position airborne radio monitoring systems. *Zhurn. Radioelektroniki*. 4: 7. (In Russian)

*Merkulov V. I., Verba V. S., Ilchuk A. R.* (2018). Automatic target tracking in radars of integrated aviation complexes: V. 1. Theoretical foundations. Radar as part of an integrated aviation complex. Moscow: *Radiotekhnika*. 2018. p. 357. (In Russian)

*Monakov A. A., Kiselev V. Yu.* (2015). Prediction of aircraft trajectory in automated air traffic control systems. *Informacionno-upravlyayushchie sistemy*. 4: 33-40. (in Russian)

- Nuic A. (2014). User Manual for the Base of Aircraft Data (BADA). Revision 3.12. *EUROCONTROL Experimental Centre*. 2014. 106 p.
- Rub'en A. G. (2015). Commercial aircraft trajectory optimization using optimal control. *Bachelor Thesis, Universidad Carlos III de Madrid*. 2015. 64 p.
- Sage E. P., White C. S. (1982). Optimal Control of Systems. Moscow: *Radio i svyaz'*. 392 p. (In Russian)
- Soler M., Olivares A., Staffetti E. Bonami P. (2013). Multiphase Mixed-Integer Optimal Control Approach to Aircraft Trajectory Optimization. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 36(5): 1267-1277. DOI 10.2514/1.60492.
- Stepanov O. A. (2010). Fundamentals of the Theory of Estimation with Applications to the Problems of Processing Navigational Information. Ch. 1: Vvedenie v teoriyu ocenivaniya. Saint Petersburg: *GNC RF CNII «Elektropribor»*, 2010. 496 p. (In Russian)
- Stepanov O. A. (2010). Fundamentals of the Theory of Estimation with Applications to the Problems of Processing Navigational Information. Ch. 2: Vvedenie v teoriyu fil'tracii. Saint Petersburg: *GNC RF CNII «Elektropribor»*, 2010. 517 p. (In Russian)
- Stratonovich R. L. (1966). Conditional Markov processes and their application to the theory of optimal control. Moscow: *Izd-vo MGU*. 1966. 319 p. (In Russian)
- Tikhonov V. I., Kharisov V. N. (1991). Statistical analysis and synthesis of radio engineering devices and systems. Moscow: *Radio i svyaz'*. 1991. 608 p. (In Russian)
- Toratani D. (2016). Study on Simultaneous Optimization Method for Trajectory and Sequence of Air Traffic Management. *Doctoral Thesis, Yokohama National University*. 2016. 101 p.
- Voronov A. A., Kim D. P., Lokhin V. M. et al. (1986). Theory of automatic control. V. 2. Teoriya nelinejnyh i special'nyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: *Vyshsh. shk.*, 1986. p. 504. (In Russian)
- Voronov E. M., Karpunin A. A. (2011). Ensuring trajectory safety in the problem of flying around a dynamic circular zone. *Nauka i obrazovanie*. 12: 1-12. (In Russian)
- Voronov E. M., Repkin A. L., Savchuk A. M., Sychev S. I. (2014). Formation of the structure of the trajectory control of the aircraft and multicriterial optimization of its parameters. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Priborostroenie*. 5: 3-39. (In Russian)
- Wickramasinghe N. K., Harada A., Miyazawa Y. (2012). Flight trajectory optimization for an efficient air transportation system. *Proceedings of the 28th International Congress of the Aeronautical Sciences*. 1-12
- Yarlykov M. S. (1985). Statistical Theory of Radio Navigation. Moscow: *Radio i svyaz'*. 1985. 344 p. (In Russian)
- Yarlykov M. S., Mironov M. A. (1993). Markov theory of estimation of random processes. Moscow: *Radio i svyaz'*. 1993. 464 p. (In Russian)
- Zayud Fadi, Polyakov V. V., Vorobiev V. V. (2009). Research of filtering methods in the problem of determining the coordinates of an aircraft in space. *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviacii. Ser. Aeromekhanika i prochnost'*. 138: 120-124. (In Russian)